Chuyên đề: SỐ PHỨC

A. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$.
- i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

  Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

  $\mathbb{C} = \left\{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\right\}$.
- Chú ý: - Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a$ là số thực.

  - Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.

  - Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Hai số phức $z_1 = a + bi;\ z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.

Một số tính chất của số phức liên hợp:

a) $\overline{\overline{z}} = z$ b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ c) $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

c) $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ d) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Ví dụ:

Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là số phức $\overline{z} = 1 - 2i$.

Số phức liên hợp của số phức $z = 5 + 3i$ là số phức $\overline{z} = 5 - 3i$.

3. Biểu diễn hình học của số phức

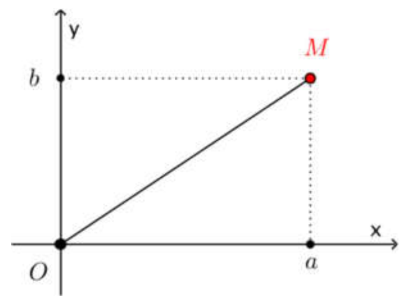
Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M\left(a; b\right)$.

Ví dụ:

- $A\left(1; -2\right)$ biểu diễn số phức $z_1 = 1 - 2i$.
- B$\left(0; 3\right)$ biểu diễn số phức $z_2 = 3i$.
- C$\left(-3; 1\right)$ biểu diễn số phức $z_3 = -3 + i$.
- D$\left(1; 2\right)$ biểu diễn số phức $z_4 = 1 + 2i$.

4. Môđun của số phức

- Môđun của số phức $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ là $\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Như vậy, môđun của số phức z là $\bar{z}$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ đến gốc tọa độ O của mặt phẳng phức là: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Một số tính chất của môđun:
  - $\left|z\right| \geq 0; \left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
  - $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2,\ \left|-z\right| = \left|z\right|,\ \left|\bar{z}\right| = \left|z\right|$
  - $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
  - $\left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \leq \left|z - z'\right| \leq \left|z\right| + \left|z'\right|$
  - $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
  - $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$



5. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.
- Hiệu hai số phức: $z + z' = a - a' + (b - b')i$.
- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Nếu $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

  $\vec{u} + \overrightarrow{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$.

  $\vec{u} - \overrightarrow{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.
- Nhân hai số phức:

  $z.z' = \left(a + bi\right)\left(a' + b'i\right) = \left(a.a' - b.b'\right) + \left(a.b' + a'.b\right)i$.
- Số phức nghịch đảo: $z^{-1} = \dfrac{1}{\left|z\right|^2}\bar{z}$.
- Chia hai số phức:

  Nếu $z \neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'.\bar{z}}{\left|z\right|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\dfrac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

❖ ***Chú ý:***

$$i^{4k} = 1;\ i^{4k+1} = i;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i\quad (\mathrm{k} \in \mathbb{Z}).$$

II. CÁC DẠNG TOÁN VỚI PHÉP TOÁN CƠ BẢN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG QUÁT

Phương pháp

- Bước 1: Gọi số phức z cần tìm là $z = a + bi \ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$.
- Bước 2: Biến đổi theo điều kiện cho trước của đề bài (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z, \overline{z}, \left|z\right|, \ldots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình 2 ẩn theo a và b nhờ tính chất 2 số phức bằng nhau (phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau), rồi từ đó suy ra a và b và suy ra được số phức z cần tìm.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính môđun của số phức z:

a) $z = \left(2 + 4i\right) + 2i\left(1 - 3i\right)$.

b) $z = \left(2 - 4i\right)\left(5 + 2i\right) + \dfrac{4 - 5i}{2 + i}$.

Giải:

a) $z = \left(2 + 4i\right) + 2i\left(1 - 3i\right) = 2 + 4i + 2i - 6i^2 = 2 + 6i + 6 = 8 + 6i$.

$\Rightarrow$ Phần thực: 8 ; Phần ảo: 6 ; Số phức liên hợp: $\overline{z} = 8 - 6i$.

Môđun $\left|z\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

b) $$z = \left(2 - 4i\right)\left(5 + 2i\right) + \frac{4 - 5i}{2 + i} = 10 + 4i - 20i - 8i^2 + \frac{\left(4 - 5i\right)\left(2 - i\right)}{2^2 + 1^2}$$
$$= 18 - 16i + \frac{8 - 14i - 5}{5} = \frac{93}{5} - \frac{94}{5}i.$$

$\Rightarrow$ Phần thực: $\dfrac{93}{5}$; Phần ảo: $\dfrac{94}{5}$; Số phức liên hợp: $\overline{z} = \dfrac{93}{5} + \dfrac{94}{5}i$.

Môđun $\left|z\right| = \sqrt{\left(\dfrac{93}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{94}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{17485}}{5}$.

Bài toán 2

Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm môđun số phức $w = zi + \overline{z}\left(1 + 2i\right)$.

Giải:

$$\begin{aligned} w = zi + \overline{z}\left(1 + 2i\right) &= (3 + 2i)i + (3 - 2i)(1 + 2i) \\ &= 3i - 2 + 3 + 6i - 2i + 4 = 5 + 7i \end{aligned}.$$

Vậy $\left|w\right| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$.

Bài toán 3

Gọi M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right|$ B. $\left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$

C. $\left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}\right|$ D. $\left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MN}\right|$

Giải:

M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức

nên $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức z_1, $\overrightarrow{ON}$ biểu diễn số phức z_2

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$

$\Rightarrow \left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{NM}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$. Chọn B.

Bài toán 4

Cho ba số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết $z_1,\ z_2,\ z_3$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $A,\ B,\ C$ trên mặt phẳng phức. Tính góc $\widehat{ACB}$?

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 120°. **D.** 150°.

Giải:

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z, N là điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ ($\overline{z}$ là số phức liên hợp của z). Khi đó M và N đối xứng nhau qua Ox.

Gọi $A',\ B',\ C'$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $\overline{z_1},\ \overline{z_2},\ \overline{z_3}$.

Từ giả thiết $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{\left|z_1\right|^2} + \frac{\overline{z_2}}{\left|z_2\right|^2} = \frac{\overline{z_3}}{\left|z_3\right|^2} \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_3}$ (do $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 3$).

Suy ra $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'} \Rightarrow OA'C'B'$ là hình bình hành.

Mà $\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \left|\overrightarrow{OB'}\right| = \left|\overrightarrow{OC'}\right| \Rightarrow OA'C'B'$ là hình thoi với $\widehat{A'C'B'} = 120^0$.

Vậy $\widehat{ACB} = 120^0$ (do $\widehat{ACB}$ và $\widehat{A'C'B'}$ đối xứng qua Ox). **Chọn C.**

Bài toán 5

Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau: $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{20}$

Giải:

$$P = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{20} = \frac{(1+i)^{21} - 1}{i}$$

$$(1+i)^{21} = \left[(1+i)^2\right]^{20}(1+i) = (2i)^{10}(1+i) = -2^{10}(1+i)$$

$$\Rightarrow P = \frac{-2^{10}(1+i) - 1}{i} = -2^{10} + (2^{10}+1)i$$

Vậy phần thực là -2^{10} và phần ảo là $2^{10}+1$.

Bài toán 6

Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2017i^{2017}$.

Giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned} S &= 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + 2017i^{2017} \\ &= 1009 + (4i^4 + 8i^8 + ... + 2016i^{2016}) + (i + 5i^5 + 9i^9 + ... + 2017i^{2017}) + ... \\ &\quad + (2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + ... + 2014i^{2014}) + (3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + ... + 2015i^{2015}) \\ &= 1009 + \sum_{n=1}^{504}(4n) + i\sum_{n=1}^{505}(4n-3) - \sum_{n=1}^{504}(4n-2) - i\sum_{n=1}^{504}(4n-1) \\ &= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i \\ &= 2017 + 1009i. \end{aligned}$$

Cách 2:

Đặt $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2017x^{2016}$

$$\Rightarrow xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2017x^{2017} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = x.\frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2} \quad (2)$$

Thay $x = i$ vào (1) và (2) ta được: $(1) \Leftrightarrow S - 1009$; $(1)=(2)$, nên:

$$S = 1009 + i.\frac{2018i^{2017}(i-1) - (i^{2018} - 1)}{(i-1)^2} = 1009 + i\frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 2017 + 1009i.$$

Bài toán 7

Cho số phức $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Tính $w = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)...(1+z^{2017})$.

Giải :

Ta có $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \longrightarrow \begin{cases} z^2 + z + 1 = 0 \\ z^3 = 1 \end{cases}$.

Do đó với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có $\begin{cases} z^{3k} = 1 & \longrightarrow 1 + z^{3k} = 2 \\ z^{3k+1} = z & \longrightarrow 1 + z^{3k+1} = 1 + z = -z^2 \\ z^{3k+2} = z^2 & \longrightarrow 1 + z^{3k+2} = 1 + z^2 = -z \end{cases}$.

Vì từ 1 đến 2017 có: 673 số chia 3 dư 1, 672 số chia 3 dư 2, 672 số chia hết cho 3 nên

$$w = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)...(1+z^{2017}) = 2^{672}.(-z)^{672}.(-z^2)^{673} = -2^{672}.z^{2018} = -2^{672}.z^{3.672+2}$$

$$= -2^{672}.z^2 = 2^{672}(1+z) = 2^{672}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{671}\left(1 - \sqrt{3}i\right).$$

Bài toán 8

Tìm số z sao cho: $z + (2+i)\overline{z} = 3 + 5i$ $\quad$ $(\text{A,A}_1 - 2014)$.

Giải:

Gọi số phức z cần tìm là $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $z + (2+i)\overline{z} = 3 + 5i$

$$\Leftrightarrow a + bi + (2+i)(a - bi) = 3 + 5i \Leftrightarrow a + bi + 2a - 2bi + ai - bi^2 = 3 + 5i$$

$$\Leftrightarrow 3a + b + (a - b)i = 3 + 5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 - 3i.$$

Bài toán 9

Tìm số phức z khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\left|z - (2+i)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$.

Giải:

Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $z.\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 = 25$ $\quad$ (1).

Lại có: $\left|z - (2+i)\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b - 5 = 0$ $\quad$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $25 - 4a - 2b + 5 = 10 \Leftrightarrow b = -2a + 10$.

Nên $a^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + (-2a+10)^2 = 25 \Leftrightarrow 5a^2 - 40a + 75 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a = 5 \\ a = 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} b = 0 \\ b = 4 \end{matrix}\right.$

Vậy $z = 5$ hoặc $z = 3 + 4i$.

Bài toán 10

Tìm các số thực a, b, c sao cho hai phương trình

$az^2 + bz + c = 0, \quad cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm chung là $z = 1 + 2i$

Giải

Theo giả thiết phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$ khi đó:

$$a\left(1+2i\right)^2+b\left(1+2i\right)+c=0 \Leftrightarrow -3a+b+c+\left(4a+2b\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+b+c=0\\4a+2b=0\end{cases} \quad (1)$$

Tương tự phương trình $cz^2+bz+a+16-16i=0$ có nghiệm $z=1+2i$ khi đó:

$$c\left(1+2i\right)^2+b\left(1+2i\right)+a+16-16i=0 \Leftrightarrow c\left(-3+4i\right)+b+2bi+a+16-16i=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b-3c+16\right)+2\left(b+2c-8\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a+b-3c+16=0\\b+2c-8=0\end{cases} \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra $(a,b,c)=(1;-2;5)$.

Bài toán 11

Cho z và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z . Biết $\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}\in\mathbb{R}$ và $\left|z-\bar{z}\right|=2\sqrt{3}$ .Tìm $|z|$

Giải :

Gọi $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right) \quad \Rightarrow \bar{z}=a-bi$.

Ta có : $\left|z-\bar{z}\right|=\left|\left(a+bi\right)-\left(a-bi\right)\right|=\left|2bi\right|=2\sqrt{3}\Rightarrow b^2=3$.

$z.\bar{z}\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(z.\bar{z}\right)^2\in\mathbb{R}$. Ta có: $\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}=\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}.1=\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}.\dfrac{z^2}{z^2}=\dfrac{z^3}{\left(z.\bar{z}\right)^2}\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow z^3\in\mathbb{R}$.

Mà $z^3=a^3+3a^2bi+3a\left(bi\right)^2+\left(bi\right)^3=a^3-3ab^2+\left(3a^2b-b^3\right)i$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a^2b-b^3=0\\b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-b^2=0\\b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\b^2=3\end{cases}\Rightarrow|z|=2.$$

Bài toán 12

Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+1-2i\right|=\left|\bar{z}+3+4i\right|$ và $\dfrac{z-2i}{\bar{z}+i}$ là một số thuần ảo.

Giải :

Đặt $z=x+yi\ (x,y)$. Theo bài ra ta có :

$$\left|x+1+\left(y-2\right)i\right|=\left|x+3+\left(4-y\right)i\right|\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=\left(x+3\right)^2+\left(y-4\right)^2\Leftrightarrow y=x+5$$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{\bar{z}+i}=\dfrac{x+\left(y-2\right)i}{x+\left(1-y\right)i}=\dfrac{x^2-\left(y-2\right)\left(y-1\right)+x\left(2y-3\right)i}{x^2+\left(y-1\right)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-\left(y-2\right)\left(y-1\right)=0\\x^2+\left(y-1\right)^2>0\\y=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{12}{7}\\y=\dfrac{23}{7}\end{cases}$. Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$.

Bài toán 13

Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0,\ z_1 + z_2 \neq 0$ và $\dfrac{1}{z_1 + z_2} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{2}{z_2}$. Tính giá trị biểu thức $P = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

Giải:

Từ giả thiết $\dfrac{1}{z_1 + z_2} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{2}{z_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_1 + z_2} = \dfrac{z_2 + 2z_1}{z_1 z_2}$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = \left(z_1 + z_2\right).\left(z_2 + 2z_1\right) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2} + 1\right)\left(1 + 2\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Đặt $t = \dfrac{z_1}{z_2}$, ta được phương trình $t = \left(t+1\right)\left(1+2t\right)$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow \left|t\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài toán 14

Nếu số phức z thỏa mãn $\left|z\right| = 1$ và $z \neq 1$ thì phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$ bằng?

Giải:

Cách 1:

Đặt $z = a + bi\ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$. Từ $\left|z\right| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Ta có: $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-a-bi} = \dfrac{1-a+bi}{\left(1-a-bi\right)\left(1-a+bi\right)} = \dfrac{1-a+bi}{\left(1-a\right)^2 + b^2}$

Suy ra phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$ là: $\dfrac{1-a}{\left(1-a\right)^2 + b^2}$.

Ta có: $\dfrac{1-a}{\left(1-a\right)^2 + b^2} = \dfrac{1-a}{a^2 - 2a + 1 + b^2} = \dfrac{1-a}{2-2a} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2:

Gọi A là phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$.

$$2A = \frac{1}{1-z} + \overline{\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{z}} = \frac{1-\bar{z}+1-z}{1-z-\bar{z}+z.\bar{z}} = \frac{2-z-\bar{z}}{1-z-\bar{z}+z^2} = \frac{2-z-\bar{z}}{2-z-\left|\bar{z}\right|^2} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 15

Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$.

Giải:

Cách 1:

Ta có $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2.\ (1)$

Mà $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} + \frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2} = z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}.$ (2)

Theo giả thiết: $1 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2).(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2).(\overline{z_1} - \overline{z_2})$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) \Rightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 1.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P = -1$.

Cách 2: **Chuẩn hóa**

Chọn $z_1 = 1$, còn z_2 chọn sao cho thỏa mãn $|z_2| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 1$.

Ta chọn như sau: Đặt $z_2 = a + bi$.

- $|z_2| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.
- $|z_1 - z_2| = 1 \longleftrightarrow |z_2 - 1| = 1 \Leftrightarrow |(a-1) + bi| = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1.$

Từ đó giải hệ $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Thay $z_1 = 1$ và $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ vào P và bấm máy.

Hoặc ta cũng có thể chọn $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Bài toán 16

Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$.
Môđun của số phức w bằng?

Giải:

Từ giả thiết $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw}-\frac{1}{z+w}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(z+w\right)^2-zw}{zw\left(z+w\right)}=0$

$$\Rightarrow z^2+w^2+zw=0 \Leftrightarrow z^2+zw+\frac{1}{4}w^2+\frac{3}{4}w^2=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}w\right)^2=-\frac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}w\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$$

Từ $\left(z+\frac{1}{2}w\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$.

Lấy môđun hai vế, ta được $\left|z\right|=\left|-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right|.\left|w\right|=1.\left|w\right|=\left|w\right| \Rightarrow \left|w\right|=2018$.

Bài toán 17

Cho số phức z,w khác 0 sao cho $\left|z-w\right|=2\left|z\right|=\left|w\right|$. Phần thực của số phức $u=\frac{z}{w}$ là ?

Giải :

Cách 1 : Gọi $u=a+bi \ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có : $\left|z-w\right|=2\left|z\right|=\left|w\right| \Leftrightarrow \begin{cases}\left|u\right|=\dfrac{\left|z\right|}{\left|w\right|}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\left|z-w\right|}{\left|w\right|}=\left|\dfrac{z-w}{w}\right|=\left|u-1\right|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{1}{4}\\ \left(a-1\right)^2+b^2=1\end{cases}$.

$\Rightarrow \left(a-1\right)^2-a^2=-2a+1=\frac{3}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{8}$

Cách 2: Gọi $w=a+bi \ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Chọn $z=1 \Rightarrow \left|z\right|=1 \Rightarrow \left|1-w\right|=2=\left|w\right| \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=4 \ \left(*\right)\\ \left(a-1\right)^2+b^2=4\end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Thay $a=\frac{1}{2}$ vào $\left(*\right) \Rightarrow b=\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow u=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i}=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{15}}{8}i$.

Bài toán 18

Tính môđun của số phức z biết $z \neq |z|$ và $\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4.

Giải:

Cách 1: Giả sử $z = a + bi \ \left(a,\ b \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{|z|-z} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}-a-bi}$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a+bi}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2} + \frac{b}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}i.$$

Theo giả thiết: $\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4 nên $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\left(a^2+b^2\right)-2a\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow |z| = \frac{1}{8}.$$

Cách 2: Nếu $z = a + bi$ thì $z + \overline{z} = 2a$.

Áp dụng: $\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $4 \Rightarrow \dfrac{1}{|z|-z} + \overline{\left(\dfrac{1}{|z|-z}\right)} = 8$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|z|-z} + \frac{1}{|z|-\overline{z}} = 8 \Leftrightarrow \frac{2|z|-z-\overline{z}}{|z|^2-|z|\left(z+\overline{z}\right)+z.\overline{z}} = 8 \Leftrightarrow \frac{2|z|-z-\overline{z}}{|z|^2-|z|\left(z+\overline{z}\right)+|z|^2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|z|-z-\overline{z}}{2|z|^2-|z|\left(z+\overline{z}\right)} = 8 \Leftrightarrow \frac{2|z|-z-\overline{z}}{|z|\left(2|z|-z-\overline{z}\right)} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} = 8 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{8}.$$

Nhận xét:
Trong bài toán tìm thuộc tính của số phức z thỏa mãn điều kiện K cho trước, nếu K là thuần z (tất cả đều z) hoặc thuần $\overline{z}$ thì đó là bài toán giải phương trình bậc nhất (phép cộng, trừ, nhân, chia số phức) với ẩn z hoặc $\overline{z}$. Còn nếu chứa hai loại trở lên (z , $\overline{z}, |z|$) thì ta sẽ gọi $z = a + bi \ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$. Từ đó sử dụng các phép toán trên số phức để đưa về hai số phức bằng nhau để giải.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI

PP CASIO

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm [MODE] [2].

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím [ENG].
- Tính môđun của số phức bấm [SHIFT] [hyp].
- Để bấm số phức liên hợp của z bấm [SHIFT] [2] [2] để hiện Conjg (liên hợp).

Sau đây là các bài toán điển hình cho các dạng tính toán cơ bản của số phức.

1. PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA

Bài toán 1

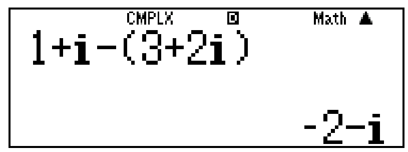
Tính $z=1+i-(3+2i)$.

Hướng dẫn:

Ta lần lượt bấm các phím như sau:

[1] [+] [ENG] [−] [(] [3] [+] [2] [ENG] [)]

Và ta được kết quả là:

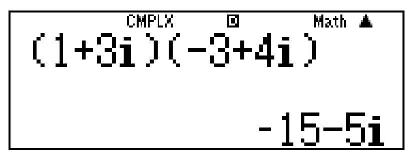


Bài toán 2

Tính $z=(1+3i)(-3+4i)$.

Hướng dẫn:

Ta lần lượt bấm các phím tương tự như trên và ta thu được kết quả như sau:

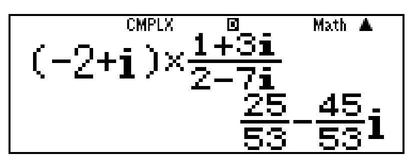


Bài toán 3

Tính $z=(-2+\text{i})\dfrac{1+3i}{2-7i}$.

Hướng dẫn:

Ta lần lượt nhập biểu thức $z=(-2+\text{i})\dfrac{1+3i}{2-7i}$ vào máy ta thu được kết quả:



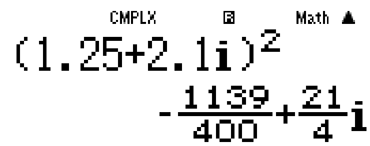
Bài toán 4

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

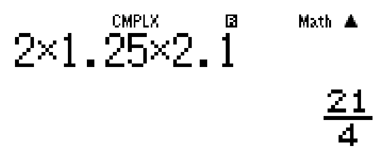
Hướng dẫn:

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a,b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).
  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2



Vậy phần ảo là $\frac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :



Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác.

Bài toán 5

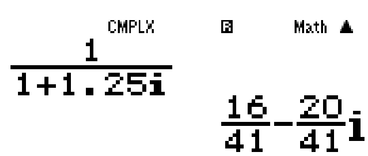
[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$ **B.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ **D.** $a - b$

Hướng dẫn:

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a = 1; b = 1.25$.
- Với $z^{-1} = \frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài toán 6

[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

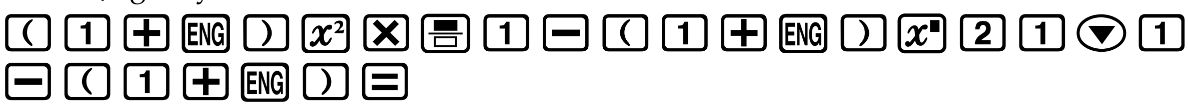
Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

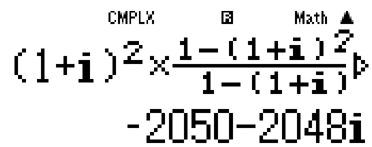
A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

Hướng dẫn:

Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1=(1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được : $z=U_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=(1+i)^2.\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính z





Vậy $z=-2050-2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050=-2^{11}-2\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

2. TÍNH MÔĐUN

Bài toán 1

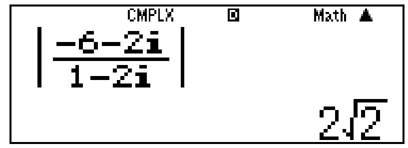
Tìm môđun của số phức $(1-2i)\bar{z}+2i=-6$.

Hướng dẫn:

$(1-2i)\bar{z}+2i=-6 \Rightarrow |z|=|\bar{z}|=\left|\dfrac{-6-2i}{1-2i}\right|$. Nên ta thực hiện bấm như sau:

SHIFT hyp ⊟ − 6 − 2 ENG ▼ 1 − 2 ENG =

Ta thu được kết quả:



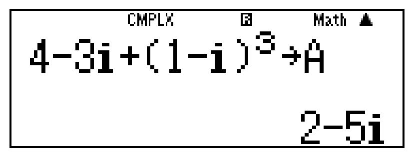
Bài toán 2

Tìm số phức $\omega=2.\overline{\overline{z_1}.z_2}$. Biết $z_1=4-3i+(1-i)^3$, $z_2=\dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$.

Hướng dẫn:

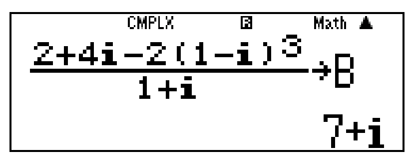
- Tính $z_1=4-3i+(1-i)^3$ và lưu vào biến A:

4 − 3 ENG + (1 − ENG) x■ 3 SHIFT RCL (−)



- Tính $z_2=\dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$ và lưu vào biến B

⊟ 2 + 4 ENG − 2 (1 − ENG) x■ 3 ▼ 1 + ENG SHIFT RCL °'''



- Tính $\omega=2.\overline{\overline{z_1}.z_2}$:

2 SHIFT 2 2 SHIFT 2 2 ALPHA (−)) × ALPHA °''') =

3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Bài toán 1

Tìm môđun của số phức z thỏa mãn: $\left(1-3i\right)z+3i=7i-2$.

$A. \left|z\right|=1$ $\quad B. \left|z\right|=4$ $\quad C. \left|z\right|=\sqrt{2}$ $\quad D. \left|z\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

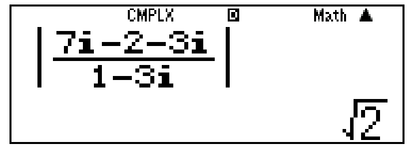
Hướng dẫn:

Ta chuyển z về dạng: $z=\dfrac{7i-2-3i}{1-3i}$ và tìm môđun.

Quy trình bấm máy:

[ALPHA] [hyp] [▭/▭] [7] [ENG] [−] [2] [−] [3] [ENG] [▼] [1] [−] [3] [ENG] [=]

Màn hình hiển thị:



>>> **Chọn C**.

Bài toán 2

Cho số phức z thỏa mãn $(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)=1-i$.

Tìm môđun của số phức $w=\dfrac{i-z}{1+z}$.

$A. \dfrac{\sqrt{82}}{4}$ $\quad B. \dfrac{\sqrt{82}}{8}$ $\quad C. \dfrac{2\sqrt{82}}{9}$ $\quad D. \dfrac{3\sqrt{82}}{5}$

Hướng dẫn:

Ở đây là sẽ cho phím X sẽ là đại diện cho số phức z.

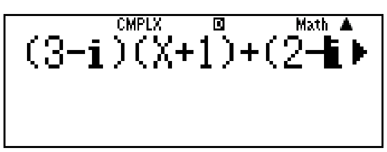
Đây là phương trình bậc nhất của số phức.

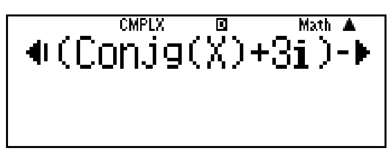
Bước 1: Các em nhập lại phương trình này với máy tính lần lượt như sau:

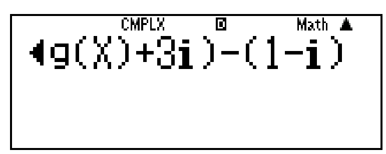
$(3-i)(\mathrm{X}+1)+(2-i)(\mathrm{C\,onj}\,g(X)+3i)-(1-i)$

[(] [3] [−] [ENG] [)] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [+] [(] [2] [−] [ENG] [)] [(] [SHIFT] [2]
[2] [ALPHA] [)] [)] [+] [3] [ENG] [)] [−] [(] [1] [−] [ENG] [)]

Màn hình hiển thị:







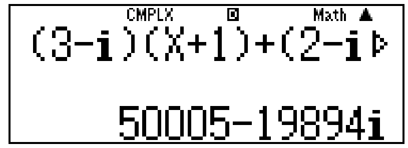
Bước 2:

Tìm số phức $z=a+bi$ nghĩa là đi tìm a và b.

Ta sẽ cho trước a=10000 và b=100 rồi từ đó suy ngược lại mối quan hệ của a và b bằng 1 hệ phương trình 2 ẩn theo a và b, lúc đó tìm được a và b.

Cho $z=10000+100i$ bằng cách nhập [CALC] [1] [0] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]

Màn hình sẽ cho kết quả:



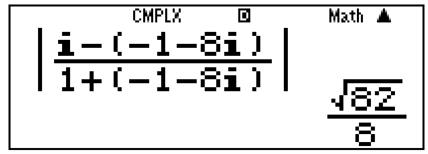
Nghĩa là:

$(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)-(1-i)=50005+19894i=5a+5+(2a-b+6)i$.

Cho nên:

$$(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)-(1-i)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a+5=0 \\ 2a-b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+5=0 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=8 \to z=-1-8i$$

Từ đó tính môđun của w:



>>> **Chọn B.**

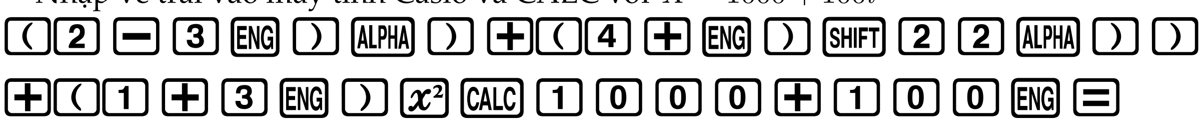
Bài toán 3

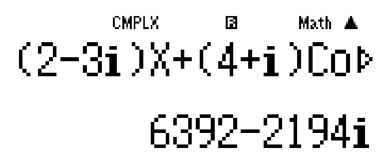
Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$ .Tìm $P=2a+b$

A. 3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

<u>Giải:</u>

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\overline{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X=1000+100i$





Vậy vế trái $=6392-2194i$ với

$$\begin{cases} 6392=6.1000+4.100-8=6a+4b-8 \\ 2194=2.1000+2.100-6=2a+2b-6 \end{cases}$$

- Để vế trái $=0$ thì $\begin{cases} 6a+4b-8=0 \\ 2a+2b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2; b=5$

Vậy $z=-2+5i \Rightarrow P=2a+b=1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C.**

4. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Bài toán 1

Các điểm M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=\dfrac{4i}{i-1}$; $z_2=(1-i)(1+2i)$; $z_3=-1+2i$

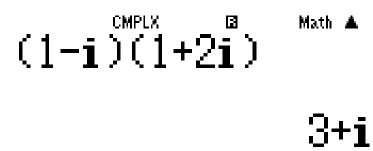
A. Tam giác vuông **B.**Tam giác cân **C.**Tam giác vuông cân **D.**Tam giác đều

Hướng dẫn:

- Rút gọn z_1 bằng Casio 

Ta được $z_1=2-2i$ vậy điểm $M(2;-2)$

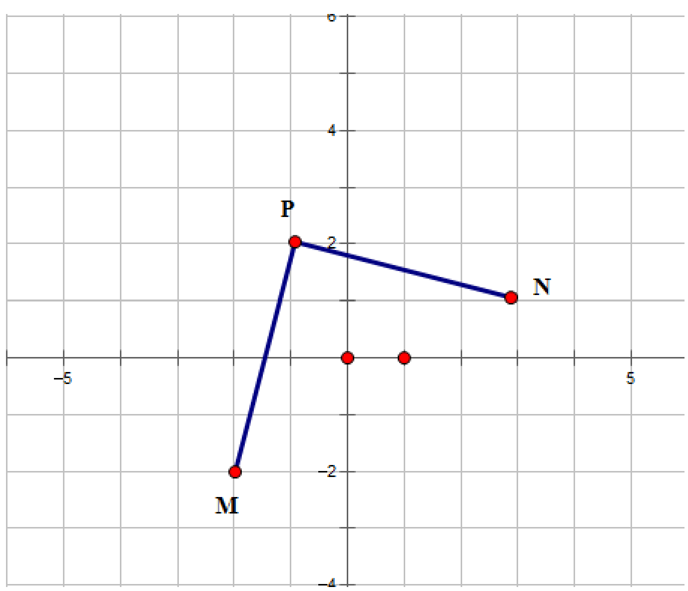
- Rút gọn z_2 bằng Casio 



Ta được $z_2=3+i$ vậy điểm $N(3;1)$

Tương tự $z_2=-1+2i$ và điểm $P(-1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M,N,P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Bài toán 2

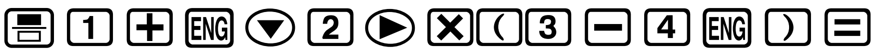
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

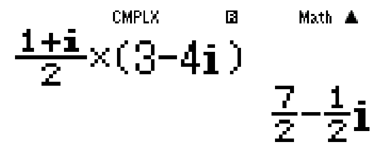
A. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ **B.** $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ **C.** $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ **D.** $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$

Hướng dẫn:

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3;-4)$

  Điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$



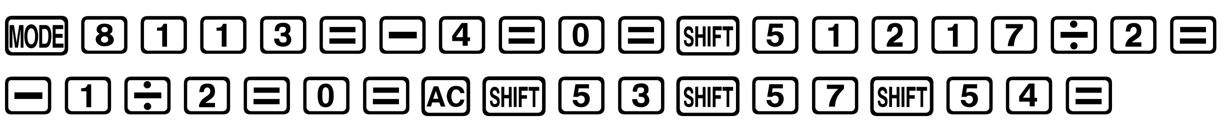


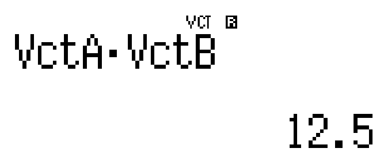
  Gốc tọa độ $O(0;0)$

- Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vecto trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O, M, M' là xong

  $\overrightarrow{OM}(3;-4;0)$, $\overrightarrow{OM'}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$

  Tính $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$





  Vậy $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right| = 12.5 = \frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right| = \frac{25}{4}$

IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i;\ z_2 = 2 - 3i$. Khi đó số phức $w = 3z_1 - z_2 + z_1z_2$ có phần ảo bằng bao nhiêu?

A. 9 **B.** 10 **C.** -9 **D.** -10

Câu 2. Cho số phức $z = 3 - 2i$, khi đó số phức $w = 2z - 3\bar{z}$ là

A. $-3 + 2i$ **B.** $-3 - 2i$ **C.** $-3 - 10i$ **D.** $11 + 2i$

Câu 3. Những số nào sau đây vừa là số thực và vừa là số ảo?

A. 0 và 1 **B.** chỉ có 0 **C.** chỉ có số 1 **D.** không có số nào

Câu 4. **(Đề thử nghiệm 2017)** Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$

A. $\bar{z} = 3 - i$ **B.** $\bar{z} = -3 + i$ **C.** $\bar{z} = 3 + i$ **D.** $\bar{z} = -3 - i$

Câu 5. **(Đề thử nghiệm 2017)** Tìm môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$

A. $|z| = \sqrt{34}$ **B.** $|z| = 34$ **C.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$

Câu 6. **(Đề minh họa 2017)** Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$

B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2

Câu 7. **(Đề minh họa 2017)** Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ **C.** $|z_1 + z_2| = 1$ **D.** $|z_1 + z_2| = 5$

Câu 8. **(Đề minh họa 2017)** Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

A. $w = 7 - 3i$ **B.** $w = -3 - 3i$ **C.** $w = 3 + 7i$ **D.** $w = -7 - 7i$

Câu 9. Môđun của số phức $z = \dfrac{(1+i)(2-i)}{1+3i}$ là

A. $|z| = 5$ **B.** $|z| = \sqrt{5}$ **C.** $|z| = \sqrt{2}$ **D.** $|z| = 1$

Câu 10. Cho số phức z thỏa điều kiện $(3 + i)z + (1 - 2i)^2 = 8 - 17i$. Khi đó hiệu phần thực và phần ảo của z là

A. 7 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -7

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z + \dfrac{2(1+2i)}{1+i} = 7 + 8i$. Môđun của số phức $w = z + i + 1$ là

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 13

Câu 12. Phần thực của số phức $z = \dfrac{4-2i}{2-i} + \dfrac{(1-i)(2+i)}{2+3i}$ là

A. $\dfrac{29}{13}$ **B.** $\dfrac{11}{13}$ **C.** $-\dfrac{29}{13}$ **D.** $-\dfrac{11}{13}$

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z+(1+3i)^2=5i$. Khi đó điểm nào sau đây biểu diễn số phức z?

A. $M(2;-3)$ **B.** $M(2;3)$ **C.** $M(-2;3)$ **D.** $M(-2;-3)$

Câu 14. Số phức z thỏa mãn $\dfrac{25}{\overline{z}}=\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{(2-i)^2}$. Khi đó phần ảo của số phức z bằng bao nhiêu?

A. 31 **B.** 17 **C.** -31 **D.** -17

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}(1+3i)=17+i$. Khi đó môđun của số phức $w=6z-25i$ là

A. $\sqrt{29}$ **B.** 13 **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** 5

Câu 16. Cho số phức z thỏa mãn $z=\dfrac{(1+i)(2+i)}{1-i}+\dfrac{(1-i)(2-i)}{1+i}$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $z=\overline{z}$ **B.** z là số thuần ảo **C.** $|z|=4$ **D.** $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$

Câu 17. Cho hai số phức $z_1=3+2i, z_2=2-i$. Giá trị của biểu thức $|z_1+z_1z_2|$ là

A. $\sqrt{130}$ **B.** $10\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{30}$ **D.** $3\sqrt{10}$

Câu 18. Cho hai số phức $z_1=2+3i, z_2=2-i$. Giá trị của biểu thức $\left|z_1+\dfrac{z_2}{z_1}\right|$ là

A. $\sqrt{5}$ **B.** 5 **C.** 13 **D.** $\sqrt{11}$

Câu 19. Cho số phức $\overline{z}=\dfrac{4(-3+i)}{1-2i}+\dfrac{(3-i)^2}{-i}$. Môđun của số phức $w=z+i\overline{z}-1$ là

A. $|w|=\sqrt{85}$ **B.** $|w|=4\sqrt{5}$ **C.** $|w|=6\sqrt{3}$ **D.** $|w|=\sqrt{56}$

Câu 20. Cho z là một số phức. Xét các mệnh đề sau :

(I) Nếu $z=\overline{z}$ thì z là một số thực

(II) Môđun của z bằng độ dài đoạn OM với O là gốc tọa độ và M là điểm biểu diễn của số phức z

(III) $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$

Trong 3 mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 21. Cho số phức $z=(m+1)+(m+2)i$ với $m\in R$. Tìm tất cả các giá trị của m để $|z|\le 5$ là.

A. $1\le m\le 0$. **B.** $0\le m$ hoặc $m\le -1$.

C. $-1\le m\le 0$. **D.** $m\ge 1$ hoặc $m\le 0$.

Câu 22. Cho Số phức $z=a+bi$ với $a,b\in R$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. $z+\overline{z}=2bi$. **B.** $z-\overline{z}=2a$. **C.** $z.\overline{z}=a^2-b^2$. **D.** $|z^2|=|z|^2$.

Câu 23. Cho số phức $z=2i$. Lựa chọn phương án đúng

A. $z^{-2}=\dfrac{1}{4}$. **B.** $|z|-2=4$.

C. $z^3 + \frac{1}{z} + z = \frac{-13i}{2}$. **D.** $z^6 = 64$.

Câu 24. Trong các kết luận sau kết luận nào **sai**?

A.Môđun số phức z là 1 số thực dương.

B.Môđun số phức z là 1 số thực.

C. Môđun số phức z là 1 số thực không âm.

D. Môđun số phức z là 1 số phức.

Câu 25. Số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ bằng

A. $1+i$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** -2

Câu 26. Cho $P = 1 + i + i^2 + ... + i^{2017}$, khẳng định nào sau đây là đúng

A. $P = 0$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = 1+i$ **D.** $P = 2i$

Câu 27. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau ?

A. $(1+i)^{2018} = 2^{1009}i$ **B.** $(1+i)^{2018} = -2^{1009}i$

C. $(1+i)^{2018} = -2^{1009}$ **D.** $(1+i)^{2018} = 2^{1009}$

Câu 28. Số phức $z = \frac{4 + 2i + i^{2017}}{2-i}$ có tổng phần thực và phần ảo là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 29. Số phức $z = \frac{(1+i)^{2017}}{2^{1008}i}$ có phần thực hơn phần ảo bao nhiêu đơn vị ?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 2^{1008}

Câu 30. Phần thực của số phức $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{2017}$ là

A. -2^{2016} **B.** 2^{1008} **C.** $-2^{1008} + 1$ **D.** -2^{1008}

Câu 31. Cho $A = 1 + i^2 + i^4 + ... + i^{4k-2} + i^{4k}$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Hỏi đâu là phương án đúng

A. $A = 2ki$ **B.** $A = 2k$ **C.** $A = 0$ **D.** $A = 1$

Câu 32. Với mọi số phức z, ta có $|z+1|^2$ bằng

A. $z + \overline{z} + 1$ **B.** $z^2 + 2z + 1$

C. $|z|^2 + 2|z| + 1$ **D.** $z.\overline{z} + z + \overline{z} + 1$

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1B	2C	3B	4D	5A	6D	7A	8B
9D	10A	11B	12A	13B	14D	15A	16D
17A	18B	19A	20D	21C	22D	23C	24B
25C	26A	27D	28B	29C	30D	31D	32D

Câu 1.

Cách 1: Ta có $w=3(1+2i)-(2-3i)+(1+2i)(2-3i)=3+6i-2+3i+8+i=9+10i$

Suy ra w có phần ảo bằng 10.

Cách 2 : Sử dụng Casio (Để máy ở chế độ Mode 2 _CMPLX)

Nhập vào máy $3(1+2i)-(2-3i)+(1+2i)(2-3i)\xrightarrow{Casio}=9+10i$. **Chọn B.**

Câu 2.

Cách 1 : Ta có $w=2(3-2i)-3(3+2i)=6-4i-9-6i=-3-10i$.

Cách 2 : Sử dụng Casio (Để máy ở chế độ Mode 2 _CMPLX)

Nhập vào máy $2(3-2i)-3(3+2i)\xrightarrow{Casio}=-3-10i$. **Chọn C.**

Câu 3. Gọi $z=a+bi$ là số phức thỏa yêu cầu bài toán $(a,b\in\mathbb{R})$

Ta có z là số thực khi $b=0$; z là số ảo khi $a=0\Rightarrow z=0$. **Chọn B.**

Câu 4. Ta có $z=i(3i+1)=3i^2+i=-3+i\Rightarrow\overline{z}=-3-i$. **Chọn D.**

Câu 5.

Cách 1: $z(2-i)+13i=1\Rightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i}=\dfrac{(1-13i)(2+i)}{2^2+1^2}=3-5i\Rightarrow|z|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

Cách 2 : Sử dụng Casio, Ta có $|z|=\left|\dfrac{1-13i}{2-i}\right|\xrightarrow{Casio}=\sqrt{34}$. **Chọn A.**

Câu 6. Ta có $z=3-2i\Rightarrow\overline{z}=3+2i$, suy ra phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2. **Chọn D.**

Câu 7. Ta có $z_1+z_2=3-2i\Rightarrow|z_1+z_2|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. **Chọn A.**

Câu 8. Ta có $w=i(2+5i)+2-5i=2i-5+2-5i=-3-3i$. **Chọn B.**

Câu 9.

Cách 1: Ta có $z=\dfrac{(1+i)(2-i)}{1+3i}=\dfrac{3+i}{1+3i}=\dfrac{(3+i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\Rightarrow|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$.

Cách 2: Dùng Casio, $\left|\dfrac{(1+i)(2-i)}{1+3i}\right|\xrightarrow{Casio}=1$. **Chọn D.**

Câu 10. Ta có $z=\dfrac{8-17i-(1-2i)^2}{3+i}\xrightarrow{\text{caisio}}2-5i$ khi đó hiệu phần thực phần ảo là: $2-(-5)=7$.

Chọn A.

Câu 11. $z=\left(7+8i-\dfrac{2(1+2i)}{1+i}\right):\left(2+i\right)=3+2i\Rightarrow \mathrm{w}=z+i+1=4+3i\Rightarrow \left|z\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Chọn B

Câu 12. $z=\dfrac{4-2i}{2-i}+\dfrac{(1-i)(2+i)}{2+3i}=\dfrac{29}{13}-\dfrac{11}{13}i$. **Chọn A.**

Câu 13. Ta có $z=\left(5i-\left(1+3i\right)^2\right):\left(1-2i\right)=2+3i\Rightarrow N\left(2;3\right)$. **Chọn B.**

Câu 14. Ta có $\bar{z}=25:\left(\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{\left(2-i\right)^2}\right)=31+17i\Rightarrow z$ có phần ảo bằng -17. **Chọn D.**

Câu 15. Ta có $z=\dfrac{\left(1+i\right)\left(2+i\right)}{1-i}+\dfrac{\left(1-i\right)\left(2-i\right)}{1+i}=-2\Rightarrow \bar{z}=-2$. **Chọn A.**

Câu 16. Ta có

$\bar{z}=\dfrac{17+i}{\left(1+3i\right)}=2-5i\Rightarrow \mathrm{w}=6z-25i=6\left(2-5i\right)-25i=12+5i\Rightarrow \left|\mathrm{w}\right|=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

Chọn D.

Câu 17. Ta có $|z_1+z_1z_2|=\left|3+2i+\left(3+2i\right)\left(2-i\right)\right|=\sqrt{130}$. **Chọn A.**

Câu 18. Ta có $|z_1+\dfrac{\bar{z_2}}{z_1}|=\left|2+3i+\dfrac{5-i}{2-3i}\right|=5$. **Chọn B.**

Câu 19. Ta có $\bar{z}=\dfrac{4\left(-3+i\right)}{1-2i}+\dfrac{\left(3-i\right)^2}{-i}=2+4i\Rightarrow \bar{z}=2-4i$.

$\left|\mathrm{w}\right|=\left|z+i\bar{z}-1\right|=\left|\left(2-4i\right)+i\left(2-4i\right)+1\right|=\left|7-6i\right|=\sqrt{49+36}=\sqrt{85}$. **Chọn A.**

Câu 20. Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in R$

1. $z=\bar{z}\Leftrightarrow \begin{cases}a=a\\ b=-b\end{cases}\Leftrightarrow b=0\Rightarrow z=a\Rightarrow$ ĐÚNG

2. $z=a+bi\Rightarrow OM=\sqrt{a^2+b^2}=\left|z\right|\Rightarrow$ ĐÚNG

3. $\left|z\right|=\sqrt{z.\bar{z}}=\sqrt{\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)}=\sqrt{a^2+b^2}=\left|z\right|\Rightarrow$ ĐÚNG .**Chọn D.**

Câu 21. Ta có $\left|z\right|\le 5\Leftrightarrow \sqrt{\left(m-1\right)^2+\left(m+2\right)^2}\le 5\Leftrightarrow m^2+m\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 0$. **Chọn C.**

Câu 22. Ta có

$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a$

$z-\bar{z}=a+bi-\left(a-bi\right)=2bi$.

$z.\bar{z}=\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)=a^2+b^2$

Nên A,B,C đều sai .Nên **Chọn D.**

Câu 23. Ta có $\left(2i\right)^3+\dfrac{1}{2i}+2i=-8i-\dfrac{1}{2}i+2i=-\dfrac{13}{2}i$. **Chọn C.**

Câu 24. Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in R$ .khi đó $\Rightarrow \left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}\ge 0$.Nên B sai. **Chọn B.**

Câu 25.

Ta có $A=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}=\left(i\right)^{2016}+\left(-i\right)^{2018}=\left(i^2\right)^{1008}+\left(i^2\right)^{1009}=1-1=0$. **Chọn C.**

Câu 26.

Cách 1: $P=1+i+i^2+i^3+...+i^{2017}$

$iP=i+i^2+i^3+...+i^{2018}$

$P-iP=1-i^{2018}\Rightarrow P=\frac{1-i^{2018}}{1-i}=\frac{1-\left(i^2\right)^{1009}}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$

Cách 2: Do P la tổng của cấp số nhân$\left(2018\right)$Phần tử $z=1+i\frac{1-i^{2018}}{1-i}=1+i$. **Chọn A.**

Câu 27. Ta có $\left(1+i\right)^{2018}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{1009}=\left(2i\right)^{1009}=2^{1009}\left(i^2\right)^{504}\left(i\right)=2^{1009}i$. **Chọn D.**

Câu 28. Ta có $i^{2017}=i.\left(i^4\right)^{504}=i\Rightarrow z=\frac{4+2i+i^{2017}}{2-i}=\frac{4+2i+i}{2-i}=1+2i$. **Chọn B.**

Câu 29. Ta có $\left(1+i\right)^{2017}=\left(1+i\right).\left[\left(1+i\right)^2\right]^{1008}=.\left(2i\right)^{1008}=2^{1008}.\left(1+i\right)$.

$z=\frac{\left(1+i\right)^{2017}}{2^{1008}.i}=\frac{2^{1008}.\left(1+i\right)}{2^{1008}.i}=\frac{1+i}{i}=1-i$. Vậy phần thực hơn phần ảo là 2. **Chọn C.**

Câu 30. Ta có $z=1+\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+\left(1+i\right)^3+...+\left(1+i\right)^{2016}=\frac{1-\left(1+i\right)^{2017}}{1-\left(1+i\right)}$.

$\left(1+i\right)^{2017}=\left(1+i\right).\left[\left(1+i\right)^2\right]^{1008}=.\left(2i\right)^{1008}=2^{1008}.\left(1+i\right)$.

$\Rightarrow z=\frac{1-\left(1+i\right)^{2017}}{1-\left(1+i\right)}=2^{1008}.\frac{1+i}{-i}=-2^{1008}+2^{1008}.i$. Phần thực là -2^{1008}. **Chọn D.**

Câu 31. Do A là tổng của một cấp số nhân (gồm $2k+1$ số hạng) với $u_1=1;q=i^2$.

Suy ra $A=1+i^2+i^4+...+i^{4k-2}+i^{4k}=1\frac{1-\left(i^2\right)^{2k+1}}{1-i^2}=\frac{1-\left(-1\right)^{2k+1}}{1-\left(-1\right)}=1$. **Chọn D.**

Câu 32. Gọi $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\bar{z}=a-bi\Rightarrow\begin{cases}z.\bar{z}=a^2+b^2\\ z+\bar{z}=2a\end{cases}$.

$\left|z+1\right|^2=\left|a+bi+1\right|^2=\left(a+1\right)^2+b^2=a^2+b^2+2a+1=z.\bar{z}+z+\bar{z}+1$.

Chú ý : Ngoài ra ta có thể viết $\left|z+1\right|^2=\left|a+bi+1\right|^2=\left|z\right|^2+z+\bar{z}+1$. **Chọn D.**

B. CĂN BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

1. LÝ THUYẾT

Nội dung lý thuyết

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn thức bậc 2 của w .
Mỗi số phức $w \neq 0$ 0 có hai căn bậc hai là hai số phức đối nhau $\left(z \text{ và} - z\right)$.

- Trường hợp w là số thực ($w = a \in \mathbb{R}$)

  + Khi $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

  + Khi $a < 0$ nên $a = (-a)i^2$, do đó w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}.i$ và $-\sqrt{-a}.i$.

  Ví dụ: Hai căn bậc 2 của -1 là i và $-i$.
  Hai căn bậc 2 của $-a^2$ $(a \neq 0)$ là ai , $-ai$.

- Trường hợp $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0)$.

  Cách 1:

  Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc 2 của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

  $$(x+yi)^2 = a + bi$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \rightarrow x = ...; y = ...$$

  Mỗi cặp số thực $\left(x; y\right)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ra một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

  Cách 2:

  Có thể biến đổi w thành bình phương của một tổng, nghĩa là $w = z^2$. Từ đó kết luận căn bậc hai của w là z và -z.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Tìm các căn bậc 2 của $-5 + 12i$.

<u>Giải:</u>

- ***<u>Cách 1:</u>***

Tìm các căn bậc 2 của $-5 + 12i$, tức là đi tìm các số phức $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = -5 + 12i$ nên ta cần giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$.

Rút y từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất, ta có:

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$$

Hệ này có 2 nghiệm: $(2;3)$ và $(-2;-3)$.

Vậy có 2 căn bậc hai của $-5+12i$ là $2+3i$ và $-2-3i$.

○ ***<u>Cách 2:</u>***

Ta có: $-5+12i = 4+2.2.3i-9 = 4+2.2.3i+\left(3i\right)^2 = (2+3i)^2$.

Từ đó dễ dàng suy ra hai căn bậc hai của $-5+12i$ là $2+3i$ và $-2-3i$.

Bài toán 2

Tìm căn bậc hai của số phức sau: $w = 4+6i\sqrt{5}$.

<u>Giải:</u>

○ ***<u>Cách 1:</u>***

Gọi $z = x+yi\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là một căn bậc hai của

Khi đó ta có: $\left(x+yi\right)^2 = 4+6i\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được nghiệm: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $z_1 = 3+i\sqrt{5};\ z_2 = -3-i\sqrt{5}$.

○ ***<u>Cách 2:</u>***

Ta có: $w = 4+6i\sqrt{5} = 9+2.3.\sqrt{5}i+\left(\sqrt{5}i\right)^2 = (3+\sqrt{5}i)^2$.

Suy ra $3+i\sqrt{5}$ là căn bậc của $w = 4+6i\sqrt{5}$. Nên $-3-i\sqrt{5}$ là căn bậc của $w = 4+6i\sqrt{5}$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $z_1 = 3+i\sqrt{5}; z_2 = -3-i\sqrt{5}$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Phương pháp giải

Cho phương trình bậc 2: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) trong đó A, B, C là những số phức $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\boxed{z_1 = \frac{-B+\sigma}{2A}; \qquad z_2 = \frac{-B-\sigma}{2A}}$$

Trong đó σ là một căn bậc 2 của Δ.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $\boxed{z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}}$

CHÚ Ý:

- Mọi phương trình bậc n: $A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).
- Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực:

  Cho phương trình bậc 2 : $Az^2 + Bz + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R}; A \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức). Ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A} \\ P = z_1 z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases}$

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Giải phương trình bậc hai sau: $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Giải:

Biệt thức $\Delta = 2^2 - 4.1.3 = -8 = 8i^2$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i; \qquad z_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i.$$

Bài toán 2

Giải phương trình bậc hai sau: $z^2 + 2z + 4i - 2 = 0$.

Giải:

Biệt thức: $\Delta = 2^2 - 4.1.(4\mathrm{i} - 2) = 4 - 16i + 8 = 12 - 16i = 16 - 2.4.2i + 4i^2 = (4-2i)^2$.

Chọn $\sigma = 4 - 2i$. Phương trình trên có hai nghiệm là :

$$z_1 = \frac{-B+\sigma}{2A} = \frac{-2+4-2i}{2} = 1 - \mathrm{i}; \quad z_2 = \frac{-B-\sigma}{2A} = \frac{-2-4+2i}{2} = -3+i.$$

2. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO VỀ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

a) Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

- **Bước 1:**

Để đưa phương trình thành nhân tử thì ta phải nhẩm nghiệm của phương trình. Có các cách nhẩm nghiệm như sau:

- Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì nghiệm của phương trình là $x = 1$.
- Tổng các hệ số bậc chẳn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì nghiệm của phương trình $x = -1$.
- <u>Định lý Bézout:</u>

  Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x - a$. Tức là $f(x) = (x-a)g(x) - f(a)$

  Hệ quả: Nếu $f(a) = 0$ thì $f(x) \vdots (x-a)$.

  Nếu $f(x) \vdots (x-a)$ thì $f(a) = 0$.
- <u>Sử dụng máy tính Casio để nhẩm nghiệm:</u>

  - Nhập phương trình vào máy tính.
  - Bấm phím r rồi nhập 1 giá trị X bất kỳ, máy tính sẽ cho ra nghiệm của phương trình. Sau đó dùng sơ đồ hoocne để phân tích thành nhân tử.
- <u>Sơ đồ Hoocne:</u>

Với đa thức f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ chia cho x - a thương là g(x) = $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_1 x + b_0$ dư r.

Nếu $r = 0$ thì $f(x) \vdots g(x)$, nghĩa là: $f(x) = (x-a)g(x)$.

Ta đi tìm các hệ số $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3} \ldots b_1, b_0$ bằng bảng sau đây.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = ab_{n-2} + a_{n-2}$		$b_1 = ab_2 + a_2$	$b_0 = ab_1 + a_1$	$r = ab_0 + a_0$

- **Bước 2:** Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình hai số phức, kết luận nghiệm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Giải các phương trình: $z^3 - 27 = 0$.

<u>Giải:</u>

$z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+3z+9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z_{2,3} = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$. Vậy p/t đã cho có 3 nghiệm.

Bài toán 2

Giải phương trình sau: $z^3-3(1+2i)z^2+(-3+8i)z+5-2i=0.$

Giải:

Nhẩm nghiệm: Ta thấy tổng các hệ số của phương trình bằng 0 nên phương trình có nghiệm $z=1$.

Khi đó:

$$z^3-3(1+2i)z^2+(-3+8i)z+5-2i=0 \Leftrightarrow (z-1)\left[z^2-2(1+3i)z+2i-5\right]=0$$
$$\Leftrightarrow z=1 \quad v \quad z=i \quad \text{v} \quad z=2+5i.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $z=1$; $z=i$; $z=2+5i.$

Bài toán 3

Cho phương trình sau: $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0\,(1)$ biết rằng phương trình có nghiệm thuần ảo.

Giải:

Đặt $z=yi$ với $y\in\mathbb{R}$. Phương trình (1) trở thành:

$$(iy)^3+(2i-2)(yi)^2+(5-4i)(yi)-10i=0 \Leftrightarrow -iy^3-2y^2+2iy^2+5iy+4y-10i=0=0+0i$$

Đồng nhất hoá hai vế ta được: $\begin{cases} -2y^2+4y=0 \\ -y^3+2y^2+5y-10=0 \end{cases}$

Giải hệ này ta được nghiệm duy nhất $y=2$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm thuần ảo $z=2i$.

* Vì phương trình (1) nhận nghiệm $2i$.

$\Rightarrow$ vế trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=(z-2i)(z^2+az+b)\quad (a,b\in\mathbb{R})$ đồng nhất hoá hai vế ta giải được $a=2$ và $b=5$.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+2z+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z^2+2z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Bài toán 4

Giải $z^3-(3-i)z^2-(2-i)z+16-2i=0$ biết rằng phương trình có 1 nghiệm thực.

Giải :

Gọi nghiệm thực là z_0 ta có:

$$z_0^3-(3-i)z_0^2-(2-i)z_0+16-2i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0^3-3z_0^2-2z_0+16=0 \\ z_o^2+z_0-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow z_0=-2$$

Khi đó ta có phương trình $(z+2)\left(z^2-(5-i)z+8-i\right)=0$

Tìm được các nghiệm của phương trình là $z=-2$; $z=2+i$; $z=3-2i$.

Bài toán 5

Giải phương trình $z^3-(2-3i)z^2+3(1-2i)z+9i=0$ biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Giải:

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo là $bi,\quad b\in\mathbb{R}$.

Thay vào phương trình ta được:

$$(bi)^3-(2-3i)(bi)^2+3(1-2i)(bi)+9i=0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+6b+\left(-b^3-3b^2+3b+9\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2b^2+6b=0\\ -b^3-3b^2+3b+9=0\end{cases} \Leftrightarrow b=-3 \Rightarrow z=-3i$$

Phương trình có thể phân tích thành $(z+3i)\left(z^2-2z+3\right)=0$

Các nghiệm của phương trình là $z=-3i$; $z=1\pm\sqrt{2}i$.

Bài toán 6

Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4+m)z^2+4m=0$ (1). Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

Giải:

$$z^4+(4+m)z^2+4m=0 \Leftrightarrow \left(z^2+4\right)\left(z^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm 2i\\ z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$$

Nếu $m<0$ thì (1) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm 2i\\ z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Khi đó $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{-m}\\ m<0\end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

Nếu $m\ge 0$ thì (1) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}z_{1;2}=\pm 2i\\ z_{3;4}=\pm i\sqrt{m}\end{array}\right.$

Khi đó $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{m}\\ m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m=1$. Kết hợp lại $m=\pm 1$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 7

Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 lần lượt là 4 nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^{\ 2}+4\right)\left(z_2^{\ 2}+4\right)\left(z_3^{\ 2}+4\right)\left(z_4^{\ 2}+4\right)=324$.

Giải:

<u>Cách 1:</u>

Đặt $t = z^2$, phương trình trở thành: $4t^2 + mt + 4 = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 .

Ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{m}{4} \\ t_1.t_2 = 1 \end{cases}$. Do vai trò bình đẳng, giả sử ta có: $z_1^{\ 2} = z_2^{\ 2} = t_1, z_3^{\ 2} = z_4^{\ 2} = t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left(t_1 + 4\right)^2 \left(t_2 + 4\right)^2 = 324 \Leftrightarrow \left[t_1 t_2 + 4\left(t_1 + t_2\right) + 16\right]^2 = 324$.

$\Leftrightarrow \left(-m + 17\right)^2 = 18^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m + 17 = 18 \\ -m + 17 = -18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 35 \end{array}\right.$.

<u>Cách 2:</u>

Đặt $f\left(z\right) = 4\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)\left(z - z_3\right)\left(z - z_4\right)$.

Do $z_1^{\ 2} + 4 = \left(z_1 + 2i\right)\left(z_1 - 2i\right)$ nên $\left(z_1^{\ 2} + 4\right)\left(z_2^{\ 2} + 4\right)\left(z_3^{\ 2} + 4\right)\left(z_4^{\ 2} + 4\right) = \dfrac{f\left(2i\right)}{4}.\dfrac{f\left(-2i\right)}{4} \quad \left(*\right)$

Mà $f\left(2i\right) = f\left(-2i\right) = 4\left(2i\right)^4 + m\left(2i\right)^2 + 4 = 68 - 4m.$

Vậy $\left(*\right) \Leftrightarrow 324 = \dfrac{\left(68 - 4m\right)^2}{4.4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 35 \end{array}\right.$.

b) Phương pháp tìm nghiệm của phương trình bậc 4 hệ số thực

Cho pt bậc 4: $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ với $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}; A \neq 0$.

Tìm các nghiệm của phương trình. Biết phương trình có 1 nghiệm phức là $z_1 = a + bi$.

*** Lưu ý:**

Nếu phương trình trên có 1 nghiệm là $z_2 = a + bi$ thì nó cũng có nghiệm $z = a - bi$.Khi đó $z_1 z_2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ nên $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)g(x)$. Dùng phép chia đa thức cho đa thức đã học ở lớp 8 để tìm $g(x)$.

Tiếp tục giải phương trình bậc hai : $g(x) = 0$ để tìm 2 nghiệm còn lại của phương trình.

BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán

Tìm phương trình bậc 4: $z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10 = 0$ .Tìm các nghiệm của phương trình. Biết phương trình có 1 nghiệm phức là $z = -2 + i$.

Hướng dẫn :

Phương trình trên có 1 nghiệm là $z_1 = -2 + i$ thì nó cũng có nghiệm $z_2 = -2 - i$.Khi đó z_1, z_2 là nghiệm của phương trình: $\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right) = z^2 + 4z + 5$.

Nên $(z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10) = \left(z^2 + 4z + 5\right)g\left(z\right)$.

Dùng phép chia đa thức cho đa thức đã học ở lớp 8 tìm được $g\left(z\right) = z^2 - 2z + 2$. Phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ có 2 nghiệm là $1 + i;\ \ 1 - i$.

Vậy phương trình trên có 4 nghiệm là : $-2 + i\ \ ; -2 - i;\ \ 1 + i;\ \ 1 - i$.

c) Phương pháp đặt ẩn phụ

- **Bước 1:** Phân tích phương trình thành các đại lượng giống nhau.
- **Bước 2:** Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện (nếu có).
- **Bước 3:** Đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc nhất hoặc bậc 2 theo ẩn mới.
- **Bước 4:** Giải và kết luận nghiệm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Giải phương trình sau: $(z^2+z)^2+4(z^2+z)-12=0$.

Giải:

Đặt $t=z^2+z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2+\ 4t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-6\\ t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2+z+6=0\\ z^2+z-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2}\\ z=\dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2}\\ z=1\\ z=-2\end{array}\right.$$

. Vậy p/t đã cho có 4 n_0 .

Bài toán 2

Giải phương trình sau trên tập số phức: $\left(z^2+\ 3z\ +6\right)^2+\ 2z\left(z^2+\ 3z\ +6\right)\ -\ 3z^2\ =\ 0$

Giải:

Đặt $t=z^2+3z+6$ phương trình đã cho có dạng:

+ Với $t=z\Leftrightarrow z^2+3z+6-z=0\Leftrightarrow z^2+2z+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1+\sqrt{5}i\\ z=-1-\sqrt{5}i\end{array}\right.$

+ Với $t=-3z\Leftrightarrow z^2+3z+6+3z=0\Leftrightarrow z^2+6z+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-3+\sqrt{3}\\ z=-3-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài toán 3

Giải phương trình $(z^2-z)(z+3)(z+2)=10$.

Giải:

PT $\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3)=10\Leftrightarrow(z^2+2z)(z^2+2z-3)=0$

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình (8) trở thành:

$$t^2-3t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1\pm i \\ z=-1\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z=-1\pm\sqrt{6}$; $z=-1\pm i$.

Bài toán 4

Giải phương trình sau trên tập số phức $z^4-z^3+\dfrac{z^2}{2}+z+1=0$.

Giải:

Nhận xét: $z=0$ không là nghiệm của phương trình (1) vậy $z\neq 0$.

Chia hai vế PT (1) cho z^2 ta được: $(z^2+\dfrac{1}{z^2})-(z-\dfrac{1}{z})+\dfrac{1}{2}=0$ (2)

Đặt $t=z-\dfrac{1}{z}$. Khi đó $t^2=z^2+\dfrac{1}{z^2}-2 \Leftrightarrow z^2+\dfrac{1}{z^2}=t^2+2$

Phương trình (2) có dạng: $t^2-t+\dfrac{5}{2}$ (3)

$$\Delta=1-4.\frac{5}{2}=-9=9i^2$$

PT (3) có 2 nghiệm $t=\dfrac{1+3i}{2}$, $t=\dfrac{1-3i}{2}$.

+ Với $t=\dfrac{1+3i}{2}$ ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2-(1+3i)z-2=0$ (4)

Có $\Delta=(1+3i)^2+16=8+6i=9+6i+i^2=(3+i)^2$

PT (4) có 2 nghiệm: $z=\dfrac{(1+3i)+(3+i)}{4}=1+i$, $z=\dfrac{(1+3i)-(3+i)}{4}=\dfrac{i-1}{2}$.

+ Với $t=\dfrac{1-3i}{2}$ ta có $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2-(1-3i)z-2=0$ (5)

Có $\Delta=(1-3i)^2+16=8-6i=9-6i+i^2=(3-i)^2$

PT(5) có 2 nghiệm: $z=\dfrac{(1-3i)+(3-i)}{4}=1-i$, $z=\dfrac{(1-3i)-(3-i)}{4}=\dfrac{-i-1}{2}$.

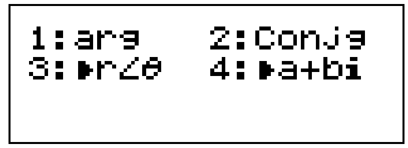
Vậy PT đã cho có 4 nghiệm: $z=1+i$; $z=1-i$; $z=\dfrac{i-1}{2}$; $z=\dfrac{-i-1}{2}$.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570VN-PLUS ĐỂ GIẢI

Một số lưu ý

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm MODE 2.

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím ENG
- Bấm SHIFT 2 và lựa chọn các chức năng:



- Chọn 1 để bấm acgumen của z $\left(\arg\left(z\right)\right)$.
- Chọn 2 để bấm số phức liên hợp của z $\left(Conjg\left(z\right)\right)$.
- Chọn 3 để chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác.
- Chọn 4 để chuyển từ dạng lượng giác sang dạng đại số.
- Bấm dấu $\angle$ bằng cách bấm: SHIFT (−)

Sau đây là cách giải các bài toán điển hình cho các dạng toán tìm căn bậc hai của một số phức; giải phương trình bậc hai với hệ số thực và các dạng toán liên quan bằng máy tính casio.

1. BÀI TOÁN TÌM CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ PHỨC

Cách 1

<u>Xây dựng công thức bấm:</u>

Cho số phức $z = a + bi$, có dạng lượng giác là $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\left(r > 0\right)$. Với

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \left|z\right|$. φ là góc thoả mãn : $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$.

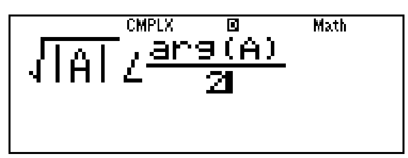
φ được gọi là acgument của z, kí hiệu là $\arg\left(z\right)$.

Khi đó z có hai căn bậc hai là: $\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ và $-\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Hay được viết gọn là: $\pm\sqrt{r}\angle\dfrac{\varphi}{2}$ hay $\pm\sqrt{\left|z\right|}\angle\dfrac{\arg\left(z\right)}{2}$

Như vậy để tìm các căn bậc hai của số phức $z = a + bi$, ta làm như sau:

- Nhập số phức z và lưu vào biến A (cái này đơn giản).
- Bấm theo công thức sau:



√■ SHIFT hyp ALPHA (−) ▶ ▶ SHIFT (−) ■/■ SHIFT 2 1 ALPHA (−)) ▼ 2 =

- Ta thu được kết quả của một căn thức của z, suy ra căn bậc hai còn lại.

Ví dụ

Tìm các căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$.

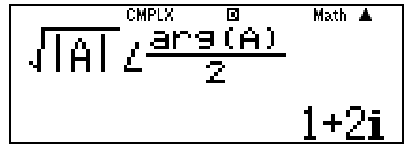
Hướng dẫn:

Quy trình bấm :

- Nhập số phức $z=-3+4i$ và lưu vào biến A: [−] [3] [+] [4] [ENG] [SHIFT] [RCL] [(−)]
- Bấm theo công thức ở trên :

[√■] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [(−)] [▶] [▶] [SHIFT] [(−)] [■/■] [SHIFT] [2] [1] [ALPHA] [(−)] [)] [▼] [2] [=]

- Màn hình cho kết quả:



Nên $1+2i$ và $-1-2i$ là 2 căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$.

Cách 2

- Nhập hàm X² : [ALPHA] [)] [x^2]
- Sử dụng phímr,nhập các giá trị vào, giá trị nào cho ra số phức z thì ta chọn đáp án đó.

Ví dụ

Tìm các căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$.

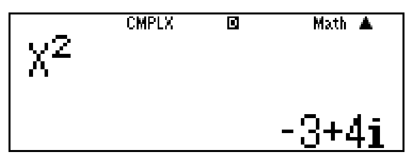
$A.1+2i; \quad -1+2i$ $\qquad$ $B.2+2i; \quad -1-2i$

$C.1+2i; \quad -1-2i$ $\qquad$ $D.-2-i; \quad -2+i$

Hướng dẫn:

- [ALPHA] [)] [x^2]
- [CALC] Nhập lần lượt các số phức ở các đáp án vào nhé.

[CALC] [1] [+] [2] [ENG] [=] màn hình sẽ cho kết quả:



Nên $1+2i$là căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$. Vì một số phức có hai căn bậc 2 đối nhau nên $-1-2i$cũng là căn bậc hai của số phức $z=-3+4i$.

>>> **Chọn C.**

Cách 3

Tìm các căn bậc hai của số phức $z = a + bi$.

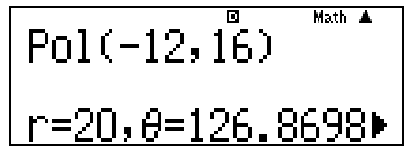
- MODE 1
- Nhấp Shift + (Pol), ta nhập Pol(a,b).
- Dấu phẩy trong (a,b) bấm bằng cách SHIFT)
- Nhấp Shift - (Rec), ta nhập Rec(X,Y), ta thu được kết quả X=...;Y=...
- Kết luận các căn bậc 2 cần tìm.

Ví dụ

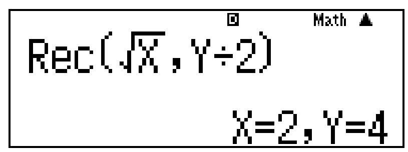
Tìm các căn bậc hai của số phức $z = -12 + 16i$.

Hướng dẫn:

- MODE 1
- SHIFT + − 1 2 SHIFT) 1 6) = màn hình hiện kết quả



- SHIFT − √■ ALPHA) ▶ SHIFT) ALPHA S⇔D ÷ 2) = thu được kết quả:



Suy ra các căn bậc hai của số phức $z = -12 + 16i$ là $2 + 4i$;$-2 - 4i$.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

a) Phương trình bậc hai với hệ số thực:

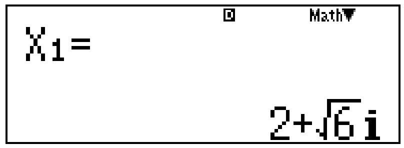
Bài toán 1

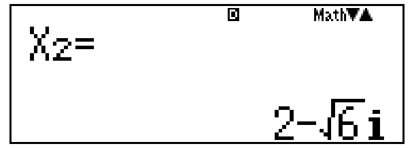
Giải phương trình bậc hai sau: $z^2 - 4z + 10 = 0$.

<u>Hướng dẫn:</u>

Quy trình bấm: [MODE] [5] [3] [1] [=] [−] [4] [=] [1] [0] [=] [=]

Thu được kết quả:





Bài toán 2

Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình : $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^{2018} + z_2^{2018}$.

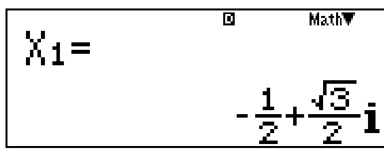
<u>Hướng dẫn :</u>

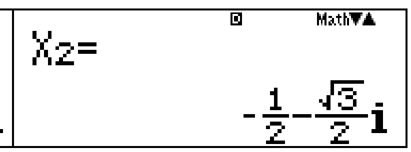
Quy trình bấm như sau:

- Tìm nghiệm z_1, z_2

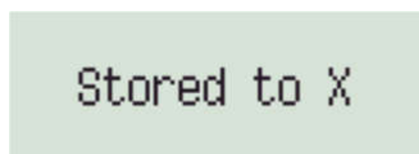
[MODE] [5] [3] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [=]

Thu được kết quả:

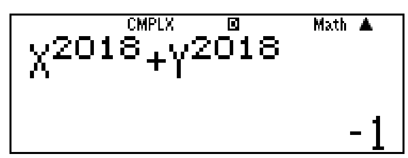




- Lưu 2 nghiệm vào X và Y: [SHIFT] [RCL] [)] [▼] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]
- Màn hình hiển thị là đã lưu biến X thành công, tương tự biến Y.



- Tính P .
- Sau đó vào [MODE] [2] và nhập P và thu được kết quả:



Sau đây là <u>Bài toán 3</u> tương tự <u>Bài toán 2</u> nhưng giải theo dạng lượng giác của số phức. Cách này luôn giải được với số mũ lớn bất kỳ, cách giải theo <u>Bài toán 2</u> có thể không giải được với số mũ lớn nào đó.

Bài toán 3

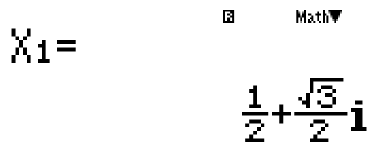
Biết z là nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = z^{2009} + \frac{1}{z^{2009}}$

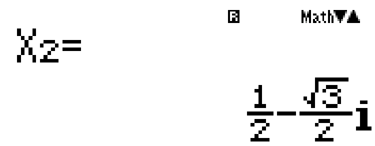
A. $P = 1$ **B.** $P = 0$ **C.** $P = -\frac{5}{2}$ **D.** $P = \frac{7}{4}$

Hướng dẫn:

- Quy đồng phương trình $z+\frac{1}{z}=0$ ta được phương trình bậc hai $z^2-z+1=0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

MODE 5 3 1 = − 1 = 1 = =

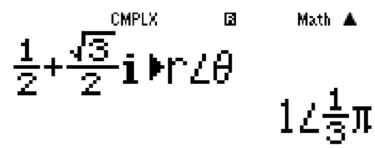




- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

Với $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

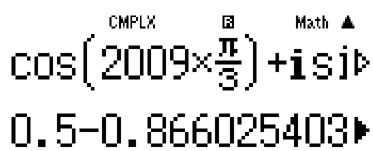
$\frac{\square}{\square}$ 1 ▼ 2 ▶ + $\frac{\square}{\square}$ √ 3 ▼ 2 ▶ ENG SHIFT 2 3 =



Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)$

Tính z^{2009} và lưu và biến A

ON cos 2 0 0 9 × $\frac{\square}{\square}$ SHIFT x10ˣ ▼ 3 ▶) + ENG sin 2 0 0 9
× $\frac{\square}{\square}$ SHIFT x10ˣ ▼ 3 ▶) = SHIFT RCL (−)



Tổng kết $P=A+\frac{1}{A}=1$

ALPHA (−) + $\frac{\square}{\square}$ 1 ▼ ALPHA (−) =

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

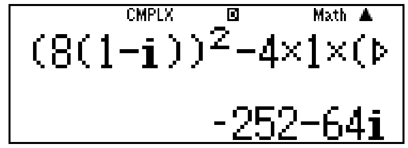
b) Phương trình bậc hai với hệ số phức:

Bài toán

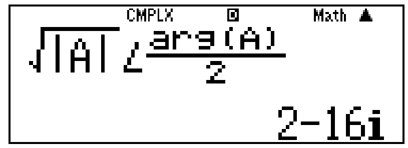
Giải phương trình : $z^2 + 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$.

Hướng dẫn:

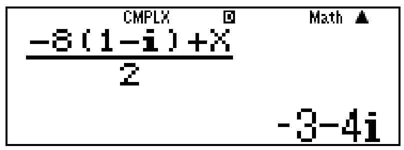
- Tính $\Delta = B^2 - 4AC$ bằng máy tính , ta được:

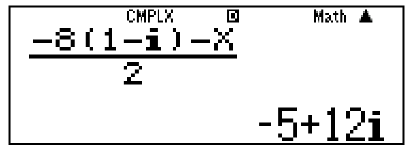


- Sau đó gán kết quả của Δ vào A.
- Dùng công thức tìm căn bậc 2 đã học ở trên, thu được 1 căn bậc 2 của Δ là $2-16i$.



- Gán kết quả này cho X.
- Nên 2 nghiệm của phương trình là :





IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 - 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $\pm 1; \pm 2i$ **B.** $\pm 2; \pm 2i$ **C.** $\pm 3; \pm 4i$ **D.** $\pm 1; \pm i$

Câu 2. Trong $\mathbb{C}$, căn bậc hai của -121 là:

A. $-11i$ **B.** $11i$ **C.** -11 **D.** $11i$ và $-11i$

Câu 3. Phương trình $8z^2 - 4z + 1 = 0$ có nghiệm là:

A $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i;\ z_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$ **B.** $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i;\ z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

C. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i;\ z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ **D.** $z_1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}i;\ z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

Câu 4. Biết $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

A. $\frac{9}{4}$ **B.** 9 **C.** 4 **D.** $-\frac{9}{4}$

Câu 5. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm phức là $z = 1 + 2i$. Tổng 2 số a và b bằng:

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -4

Câu 6. Gọi $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là:

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Câu 7. Gọi $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Khi đó $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ có giá trị là

A. -7 **B.** – 8 **C.** -4 **D.** 8

Câu 8. Phương trình $z^3 = 8$ có bao nhiêu nghiệm phức với phần ảo âm?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 9. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

A. 4 **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 9 **D.** $-\frac{9}{4}$

Câu 10. Phương trình sau có mấy nghiệm thực: $z^2 + 2z + 2 = 0$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số nghiệm.

Câu 11. Tìm các căn bậc hai của -9.

A. $\pm 3i$ **B.** 3 **C.** $3i$ **D.** -3

Câu 12. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 + 4 = 0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1 - 4i); \pm(1 + 4i)$ **B.** $\pm(1 - 2i);\ \pm(1 + 2i)$

C. $\pm(1 - 3i); \pm(1 + 3i)$ **D.** $\pm(1 - i);\ \pm(1 + i)$

Câu 13. Giải phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$ trên tập số phức ta được nghiệm là:

A. $z=1\pm 2\sqrt{2}i$ **B.** $z=1\pm \sqrt{6}i$

C. $z=1\pm \sqrt{2}i$ **D.** $z=1\pm \sqrt{7}i$

Câu 14. Căn bậc hai của số phức $4+6\sqrt{5}i$ là:

A. $-\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **B.** $\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **C.** $\pm\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **D.** 2

Câu 15. Gọi z là căn bậc hai có phần ảo âm của $33-56i$. Phần thực của z là:

A. 6 **B.** 7 **C.** 4 **D.** –4

Câu 16. Tập nghiệm trong $\mathbb{C}$ của phương trình $z^3+z^2+z+1=0$ là:

A. $\left\{-i;i;1;-1\right\}$ **B.** $\left\{-i;i;1\right\}$ **C.** $\left\{-i;-1\right\}$ **D.** $\left\{-i;i;-1\right\}$

Câu 17. Trên tập số phức, phương trình bậc hai có hai nghiệm $\alpha=4+3i;\beta=-2+i$ là:

A. $z^2+\left(2+4i\right)z-\left(11+2i\right)=0$ **B.** $z^2-\left(2+4i\right)z-\left(11+2i\right)=0$

C. $z^2-\left(2+4i\right)z+\left(11+2i\right)=0$ **D.** $z^2+\left(2+4i\right)z+\left(11+2i\right)=0$

Câu 18. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn điều kiện $z^2=|z|^2+\bar{z}$?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 19. Phương trình $\left(2+i\right)z^2+az+b=0\left(a,b\in\mathbb{C}\right)$ có hai nghiệm là $3+i$ và $1-2i$. Khi đó $a=?$

A. $-9-2i$ **B.** $15+5i$ **C.** $9+2i$ **D.** $15-5i$

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $z^2-6z+13=0$. Tính $\left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|$

A. $\sqrt{17}$ và 4 **B.** $\sqrt{17}$ và 5 **C.** $\sqrt{17}$ và 3 **D.** $\sqrt{17}$ và 2

Câu 21. Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+\left(1-3i\right)z-2\left(1+i\right)=0$. Khi đó $w=z_1^2+z_2^2-3z_1z_2$ là số phức có môđun là:

A. 2 **B.** $\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{13}$ **D.** $\sqrt{20}$

Câu 22. Số nghiệm của phương trình với ẩn số phức z: $4z^2+8|z|^2-3=0$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 23. Tìm số phức z để $z-\bar{z}=z^2$.

A $z=0;z=1-i$ **B.** $z=0;z=1+i$

C. $z=0;z=1+i;z=1-i$ **D.** $z=1+i;z=1-i$

Câu 24. Với mọi số ảo z, số $z^2+|z|^2$ là:

A. Số thực âm **B.** Số 0

C. Số thực dương **D.** Số ảo khác 0

Câu 25. Trong trường số phức phương trình $z^3+1=0$ có mấy nghiệm?

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 26. Giá trị của các số thực b, c để phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận số phức $z=1+i$ làm một nghiệm là:

A. $\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}b=-2\\c=-2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}b=-2\\c=2\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}b=2\\c=2\end{cases}$

Câu 27. Trên tập hợp số phức, phương trình $z^2+7z+15=0$ có hai nghiệm z_1,z_2. Giá trị biểu thức $z_1+z_2+z_1z_2$ là:

A. –7 **B.** 8 **C.** 15 **D.** 22

Câu 28. Tìm số nguyên x, y sao cho số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $z^3=18+26i$

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Câu 29. Trên tập số phức, cho phương trình sau: $(z+i)^4+4z^2=0$. Có bao nhiêu nhận xét đúng trong số các nhận xét sau?

1. Phương trình vô nghiệm trên trường số thực $\mathbb{R}$.
2. Phương trình vô nghiệm trên trường số phức $\mathbb{C}$.
3. Phương trình không có nghiệm thuộc tập số thực.
4. Phương trình có bốn nghiệm thuộc tập số phức.
5. Phương trình chỉ có hai nghiệm là số phức.
6. Phương trình có hai nghiệm là số thực

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 30. Phương trình $z^6-9z^3+8=0$ có bao nhiêu nghiệm trên tập số phức?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 6

Câu 31. Giả sử z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$ và *A, B* là các điểm biểu diễn của z_1,z_2. Tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB* là:

A. $I(1;1)$ **B.** $I(-1;0)$ **C.** $I(0;1)$ **D.** $I(1;0)$

Câu 32. Cho phương trình $z^2+mz-6i=0$. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì *m* có dạng $m=\pm(a+bi)(a,b\in\mathbb{R})$. Giá trị $a+2b$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Câu 33. Gọi z_1,z_2,z_2,z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4=1$. Giá trị của $P=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$ là:

A. $\dfrac{17}{8}$ **B.** $\dfrac{17}{9}$ **C.** $\dfrac{9}{17}$ **D.** $\dfrac{17i}{9}$

Câu 34. Trong tập số phức, giá trị của *m* để phương trình bậc hai $z^2+mz+i=0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$ là:

A. $\pm(1-i)$ **B.** $(1-i)$ **C.** $\pm(1+i)$ **D.** $-1-i$

Câu 35. Cho phương trình $z^2-mz+2m-1=0$ trong đó *m* là tham số phức. Giá trị của *m* để phương trình có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=-10$ là:

A. $m=2\pm 2\sqrt{2}i$ **B.** $m=2+2\sqrt{2}i$

C. $m=2-2\sqrt{2}i$ **D.** $m=-2-2\sqrt{2}i$

Câu 36. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 8 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Giá trị của số phức $w = (2z_1 + z_2)\overline{z_1}$ là:

A. $12 + 6i$ **B.** 10 **C.** 8 **D.** $12 - 6i$

Câu 37. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $z^4 - 1 = 0$ trên tập số phức là bao nhiêu?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 38. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Giá trị biểu thức $M = |z_1| + |3z_1 - z_2|$ là:

A. $\sqrt{6} - 2\sqrt{21}$ **B.** $\sqrt{6} + 2\sqrt{21}$

C. $\sqrt{6} + 4\sqrt{21}$ **D.** $\sqrt{6} - 4\sqrt{21}$

Câu 39. Phương trình $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$ trên tập số phức có các nghiệm là:

A. $2 \pm i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$ **B.** $2 \pm i\sqrt{2}$ hoặc $1 \pm 2i\sqrt{2}$

C. $1 \pm 2i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$ **D.** $-1 \pm 2i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$

Câu 40. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0$. Khi đó $A = z_1^4 + z_2^4$ có giá trị là:

A. 23 **B.** $\sqrt{23}$ **C.** 13 **D.** $\sqrt{13}$

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1.D	2.D	3.C	4.D	5.C	6.B	7.D	8.A	9.D	10.A
11.A	12.D	13.B	14.C	15.B	16.D	17.B	18.A	19.A	20.B
21.D	22.C	23.C	24.B	25.B	26.C	27.B	28.C	29.D	30.D
31.D	32.D	33.B	34.A	35.A	36.C	37.D	38.B	39.A	40.A

Câu 1. $z^4-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \\ z^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \\ z=\pm i \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 2.

Ta có: $z=-121 \Leftrightarrow z=(11i)^2$. Do đó z có hai căn bậc hai là $z=11i; z=-11i$. **Chọn D.**

Câu 3. $\Delta'=b'^2-ac=4-8=-4<0 \Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{2\pm 2i}{8}=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{i}{4}$. **Chọn C.**

Câu 4. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z_1^2+z_2^2=S^2-2P=\dfrac{3}{4}-3=-\dfrac{9}{4}$. **Chọn D.**

Câu 5. Vì $z=1+2i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0 \Leftrightarrow a+b+2ai=3-4i \Leftrightarrow a+b=3$. **Chọn C.**

Câu 6. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=4 \\ P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=5 \end{cases}$

$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=16-2.5=6$. **Chọn B.**

Câu 7. $z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow (z+1)^2+3=0 \Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{3}i \Rightarrow A=|z_1|^2+|z_2|^2=8$. **Chọn D.**

Câu 8.

$z^3=8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0 \Leftrightarrow (z-2)\left[(z+1)^2+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-1\pm\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Do đó phương trình chỉ có một nghiệm phức có phần ảo âm. **Chọn A.**

Câu 9. Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ P=z_1z_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=\dfrac{3}{4}-3=-\dfrac{9}{4}$. Chọn D.

Câu 10. $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1<0$ nên phương trình vô nghiệm trên tập số thực. **Chọn A.**

Câu 11. Ta có $-9=9.i^2$ nên -9 có các căn bậc hai là $3i$ và $-3i$. **Chọn A.**

Câu 12.

$z^4+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=2i \\ z^2=-2i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm(1+i) \\ z=\pm(1-i) \end{array}\right.$ **Chọn D.**

Câu 13. $z^2-2z+7=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+6=0 \Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{6}i$. **Chọn B.**

Câu 14. Giả sử w là một căn bậc hai của $4+6\sqrt{5}i$. Ta có:

$w^2=4+6\sqrt{5}i \Leftrightarrow w^2=\left(3+\sqrt{5}i\right)^2 \Leftrightarrow w=\pm\left(3+\sqrt{5}\right)i$. **Chọn C.**

Câu 15. Ta có: $33-56i=(7-4i)^2 \Rightarrow z=7-4i$. Do đó phần thực của z là 7. Chọn B.

Câu 16. $z^3+z^2+z+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=\pm i \end{array}\right.$. **Chọn D**

Câu 17. Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} S=\alpha+\beta=2+4i \\ P=\alpha.\beta=-11-2i \end{cases}$.

Do đó α,β là hai nghiệm của phương trình: $z^2-Sz+P=0 \Leftrightarrow z^2-(2+4i)z-(11+2i)=0$.

Chọn B.

Câu 18. Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện trên. Ta có:

$z^2=|z|^2+\bar{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2=a^2+b^2+a-bi \Leftrightarrow a+2b^2-bi-2abi=0 \Leftrightarrow \left(a+2b^2\right)+(-b-2ab)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b^2=0 \\ b+2ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b^2=0 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 19. Theo Viet, ta có:

$S=z_1+z_2=-\dfrac{a}{2+i}=4-i \Leftrightarrow a=(i-4)(i+2) \Leftrightarrow a=-9-2i$. **Chọn A.**

Câu 20.

$z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow (z-3)^2+4=0 \Leftrightarrow z=3\pm 2i$

+) Nếu $z=3+2i$:

$z+\dfrac{6}{z+i}=3+2i+\dfrac{6}{3+3i}=\dfrac{9+15i}{3+3i}=\dfrac{-18+72i}{18}=-1+4i$

$\Rightarrow \left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|=|-1+4i|=\sqrt{17}$

+) Nếu $z=3-2i$:

$z+\dfrac{6}{z+i}=3-2i+\dfrac{6}{3-i}=\dfrac{13-9i}{3-i}=\dfrac{30-40i}{10}=3-4i \Rightarrow \left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|=|3-4i|=5$ **Chọn B.**

Câu 21. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-1+3i \\ P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=-2(1+i) \end{cases}$

$w=z_1^2+z_2^2-3z_1z_2=S^2-5P=(-1+3i)^2+10(1+i)=2+4i\Rightarrow |w|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$. **Chọn D**

Câu 22. Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình. Ta có:

$$4(a+bi)^2+8(a^2+b^2)-3=0\Leftrightarrow 4(a^2-b^2+2abi)+8(a^2+b^2)-3=0$$
$$\Leftrightarrow 12a^2+4b^2+8abi-3=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12a^2+4b^2=3\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2+b^2=1\\ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a^2+4ab+b^2=1\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2a+b)^2=1\\\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=\pm1\end{cases}\\\begin{cases}a=\pm\dfrac{1}{4}\\b=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phức. **Chọn C.**

Câu 23. Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn đẳng thức trên. Ta có:

$$z-\bar{z}=z^2\Leftrightarrow a+bi-a+bi=(a+bi)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\\left[\begin{array}{l}a=1\\b=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=\pm1\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\z=1+i\\z=1-i\end{array}\right..$$

Chọn C.

Câu 24. Do z là số ảo nên z có dạng: $z=bi\,(b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z^2+|z|^2=(bi)^2+b^2=-b^2+b^2=0$. **Chọn B.**

Câu 25. $z^3+1=0\Leftrightarrow(z+1)(z^2-z+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có ba nghiệm trong trường số phức. **Chọn B.**

Câu 26. Do $z=1+i$ là một nghiệm của $z^2+bz+c=0$ nên ta có:

$$(1+i)^2+b(1+i)+c=0\Leftrightarrow b+c+bi+2i=0\Rightarrow\begin{cases}b+c=0\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\c=2\end{cases}.$$ **Chọn C.**

Câu 27. Theo Viet, ta có: $\begin{cases}S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-7\\P=z_1z_2=\dfrac{c}{a}=15\end{cases}$

$\Rightarrow z_1+z_2+z_1z_2=S+P=-7+15=8$ **Chọn B.**

Câu 28.

$$z^3=18+26i\Leftrightarrow(x+yi)^3=18+26i\Leftrightarrow x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i=18+26i$$
$$\Leftrightarrow(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i=18+26i$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^3-3xy^2=18\\3x^2y-y^3=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2-3y^2)=18\\y(3x^2-y^2)=26\end{cases}$$

Do *x*, *y* nguyên nên

$$x\left(x^2-3y^2\right)=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\x^2-3y^2=6\end{cases}\\\begin{cases}x=6\\x^2-3y^2=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=\pm1\end{cases}\\\begin{cases}x=6\\y=\pm\sqrt{11}\end{cases}(\text{loai})\end{array}\right.$$

Mà $y\left(3x^2-y^2\right)=26 \Rightarrow x=3; y=1$. **Chọn C.**

Câu 29.

$$\left(z+i\right)^4+4z^2=0 \Leftrightarrow \left(z+i\right)^4=-4z^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(z+i\right)^2=2iz\\\left(z+i\right)^2=-2iz\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z^2-1=0\\z^2+4iz-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=\pm1\\\left(z+2i\right)^2+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=\pm1\\z=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i\end{array}\right.$$

Do đó phương trình có 2 nghiệm thực và 4 nghiệm phức. Vậy nhận xét 4, 6 đúng. **Chọn D.**

Câu 30. Ta có:

$$z^6-9z^3+8=0 \Leftrightarrow \left(z-1\right)\left(z-2\right)\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+2z+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\z=2\\z=\pm\sqrt[3]{-1}\\-1\pm i\sqrt{3}\end{array}\right.$$ **Chọn D.**

Câu 31. $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left(z-1\right)^2+4=0 \Leftrightarrow z=1\pm2i \Rightarrow A\left(1;2\right); B\left(1;-2\right)$

Do đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I\left(1;0\right)$. **Chọn D.**

Câu 32. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo Viet, ta có: $\begin{cases}S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-m\\P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=-6i\end{cases}$

Theo bài cho, tổng bình phương hai nghiệm bằng 5. Ta có:

$$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=m^2+12i=5 \Leftrightarrow m^2=5-12i \Leftrightarrow m^2=\left(3-2i\right)^2$$

$$\Rightarrow m=\pm\left(3-2i\right)$$

$\Rightarrow a=3; b=-2 \Rightarrow a+2b=3-4=-1$. **Chọn D.**

Câu 33. Với mọi $z\neq\dfrac{i}{2}$, ta có: $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{z-1}{2z-i}=\pm1\\\dfrac{z-1}{2z-i}=\pm i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=-1+i\\z=\dfrac{1+i}{3}\\z=\dfrac{2+4i}{5}\\z=0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)=\left[\left(-1+i\right)^2+1\right]\left[\frac{\left(1+i\right)^2}{9}+1\right]\left[\frac{\left(2+4i\right)^2}{25}+1\right].$$

$$=\left(1-2i\right)\frac{9+2i}{9}.\frac{13+16i}{25}=\frac{425}{9.25}=\frac{17}{9}$$ **Chọn B.**

Câu 34. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình.

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = -m \\ P = z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = i \end{cases} \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = S^2 - 2P = m^2 - 2i$

Ta có: $m^2 - 2i = -4i \Leftrightarrow m^2 = -2i \Leftrightarrow m^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow m = \pm(1-i)$ **Chọn A.**

Câu 35. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = m \\ P = z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = 2m - 1 \end{cases}$

$$z_1^2 + z_2^2 = -10 \Leftrightarrow S^2 - 2P = -10 \Leftrightarrow m^2 - 2(2m-1) = -10 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (m-2)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$$
Chọn A.

Câu 36. $z^2 + 2z + 8 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm \sqrt{7}i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + \sqrt{7}i \\ z_2 = 1 - \sqrt{7}i \end{cases}$

$$w = (2z_1 + z_2)\overline{z_1} = \left[2\left(-1+\sqrt{7}i\right) + 1 - \sqrt{7}i\right]\left(-1-\sqrt{7}i\right) = \left(-1+\sqrt{7}i\right)\left(-1-\sqrt{7}i\right)$$
$$= 1 + 7 = 8$$
Chọn C.

Câu 37. $z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm i \end{array}\right.$.

Do đó tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $1 - 1 = 0$. **Chọn D.**

Câu 38.

$$z^2 - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{5}i$$
$$\Rightarrow z_1 = 1 - \sqrt{5}i; z_2 = 1 + \sqrt{5}i$$
$$\Rightarrow M = |z_1| + |3z_1 - z_2| = \left|1 - \sqrt{5}i\right| + \left|2 - 4\sqrt{5}i\right| = \sqrt{6} + \sqrt{84} = \sqrt{6} + 2\sqrt{21}$$
Chọn B.

Câu 39.

$$x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 6)(x^2 + 4x + 12) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 6 = 0 \\ x^2 + 4x + 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + 2 = 0 \\ (x+2)^2 + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{2}i \\ x = -2 \pm 2\sqrt{2}i \end{array}\right.$$
Chọn A.

Câu 40. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = -\sqrt{3} \\ P = z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = 7 \end{cases}$

$A = z_1^4 + z_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = (3 - 2.7)^2 - 2.49 = 23$. **Chọn A.**

C. TẬP HỢP ĐIỂM CỦA SỐ PHỨC

I. LÝ THUYẾT

Lý thuyết về tập hợp điểm của số phức

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó. Khi đó ta giải bài toán này như sau:

1. Phương pháp tổng quát:

Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M\left(x;y\right)$. Biến đổi điều kiện của bài toán thành để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

2. Giả sử các điểm M, A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z, a, b

- $|z-a|=|z-b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn AB
- $|z-a|=|z-b|=k(k\in\mathbb{R}, k>0, k>|a-b|) \Leftrightarrow MA+MB=k \;\Leftrightarrow M\in(E)$ nhận A, B là hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng *k*.

3. Giả sử M và M′ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức *z* và *w* = *f(z)*

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

Hệ thức *w* = *f(z)* tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa *x, y, u, v*

- Nếu biết một hệ thức giữa *x, y* ta tìm được một hệ thức giữa *u, v* và suy ra được tập hợp các điểm M′
- Nếu biết một hệ thức giữa *u, v* ta tìm được một hệ thức giữa *x, y* và suy ra được tập hợp điểm M′.

Nhắc lại kiến thức về hình học giải tích Oxy

1. Các dạng phương trình đường thẳng

- Dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$.

- Dạng đại số: $y = ax + b$.

- Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

- Dạng chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$.

- Phương trình đoạn chắn $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

- Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ biết hệ số góc *k*: $y = k(x - x_0) + y_0$

2. Phương trình đường tròn tâm I(a;b) bán kính R:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

Lưu ý điều kiện để phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn: $a^2 + b^2 - c > 0$ có tâm $I\left(-a, -b\right)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Phương trình (Elip): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Với hai tiêu cự $F_1(-c;0), F_2(c;0), F_1F_2 = 2c$. Trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và $a^2 = b^2 + c^2$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Giả sử M là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z.

Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $|z-1+i|=2$ b) $|z+1-3i|\le 4$ c) $|2+z|=|1-i|$

Giải:

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$

a) Xét hệ thức: $|z-1+i|=2$.

$$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2.$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4.$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm $M(z)$ trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm tại $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

b) Xét hệ thức : $|z+1-3i|\le 4 \Leftrightarrow |(x+1)+(y-3)i|\le 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+\ (y-1)^2}\le 4$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\ (y-1)^2\le 16.$$

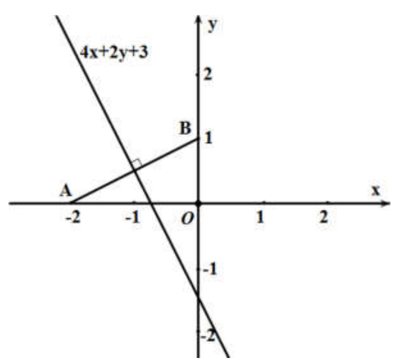
Vậy tập hợp các điểm M trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là hình tròn có tâm là $(-1;1)$; bán kính $r=4$.

Nhận xét: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+1-3i|\ge 4$ là tập hình các điểm nằm trên và nằm ngoài đường tròn có tâm là $(-1;1)$; bán kính $r=4$.

c) Xét hệ thức: $|2+z|=|z-i|$

$$\Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|x+(y-1)i|$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $4x+2y+3=0.$



Nhận xét: Đường thẳng $4x+2y+3=0$ chính là đường trung trực của đoạn AB.

Bài toán 2

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|z-i\right|=\left|\left(1+i\right)z\right|$.

Giải:

Đặt $z=x+yi\ (x,y)\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$$\left|z-i\right|=\left|\left(1+i\right)z\right|\Leftrightarrow\left|x+\left(y-1\right)i\right|=\left|\left(x-y\right)+\left(x+y\right)i\right|$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=\left(x-y\right)^2+\left(x+y\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-1=0\Leftrightarrow x^2+\left(y+1\right)^2=2$$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+\left(y+1\right)^2=2$.

Bài toán 3

Cho các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ có biểu diễn trên mặt phẳng phức là ba đỉnh của tam giác đều có phương trình đường tròn ngoại tiếp là $\left(x+2017\right)^2+\left(y-2018\right)^2=1$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2+z_3$ bằng?

Giải:

Đường tròn đã cho có tâm I biểu diễn số phức $z=-2017+2018i$.

Gọi $A,\ B,\ C$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OI}$ (do tam giác ABC đều nên $G\equiv I$).

Suy ra $z_1+z_2+z_3=3\left(-2017+2018i\right)=-6051+6054i$.

Nên tổng phần thực và phần ảo của số phức w bằng 3.

Bài toán 4

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

Giải :

Đặt $z=x+yi\ (x,y)\in\mathbb{R}$, khi đó:

$$u=\frac{\left(x+2\right)+\left(y+3\right)i}{x+\left(y-1\right)i}=\frac{\left[\left(x+2\right)+\left(y+3\right)i\right]\left[x-\left(y-1\right)i\right]}{x^2+\left(y-1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2+2x+2y-3\right)+2\left(2x-y+1\right)i}{x^2+\left(y-1\right)^2}$$

u là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ x^2+\left(y-1\right)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2=5 \\ \left(x;y\right)\neq\left(0;1\right) \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $\sqrt{5}$ trừ điểm $(0;1)$.

Bài toán 5

Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện sau:

a) $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ b) $\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=4$

Giải:

Đặt: $z=x+yi\ (x,y\in R)\ \Rightarrow$ z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $\mathrm{M}\left(\mathrm{x};\mathrm{y}\right)$.

a) $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow 2\left|x+(y-1)i\right|=\left|(1+y)i\right|\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$

Vậy tập hợp điểm M là đường parabol (P) có phương trình $y=\dfrac{x^2}{4}$.

b) $\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}=4\quad(*)$.

Đặt $F_1(-1;0)\ ;F_2(1;0)$

$(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=4$ và $F_1F_2=2$.

Suy ra tập hợp M là elíp (E) có 2 tiêu điểm là F_1,F_2.

Gọi (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a;\ b^2=a^2-c^2)$

Ta có $\begin{cases} MF_1+MF_2=2a \\ F_1F_2=2c \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ c=1 \end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=3$

Vậy (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

Bài toán 6

Trong tập số phức $\mathbb{C}$, gọi z_1 và z_2 các nghiệm của phương trình $z^2-2z+10=0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k=x+iy$ trên mặt phẳng phức. Để tam giác MNP đều thì số phức k là?

Giải:

Ta có $z^2-2z+10=0\Leftrightarrow z_{1,2}=1\pm 3i$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k=x+iy$ trên mặt phẳng phức. Khi đó $M\left(1;3\right)$, $N\left(1;-3\right)$, $P\left(x;y\right)$

Để ΔMNP đều $\Leftrightarrow\begin{cases} MN=MP \\ MN=NP \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} MN^2=MP^2 \\ MN^2=NP^2 \end{cases}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;-6)$, $\overrightarrow{MP}=(x-1;y-3)$, $\overrightarrow{NP}=(x-1;y+3)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=36\\(x-1)^2+(y+3)^2=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\pm\sqrt{27}\\y=0\end{cases} \Rightarrow k=1\pm\sqrt{27}$.

Bài toán 7

Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\dfrac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

Giải:

Ta có: $Z=\dfrac{z-1}{z+2i}=\dfrac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i}=\dfrac{x-1+yi}{x+(y+2)i}=\dfrac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$

$\Rightarrow Z=\dfrac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2}$

Z là một số thực khi và chỉ khi $y-2x+2=0$.

Tập hợp các điểm m biểu diễn số phức $z=x+yi$ là đường thẳng $y-2x+2=0 \Leftrightarrow y=2x-2$

Bài toán 8

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|+|z+i|=4$ là?

Giải:

Ta có $|z-i|+|z+i|=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+(y+1)^2}\le 4\\x^2+(y-1)^2=16+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y+1)^2\le 16\\2\sqrt{x^2+(y+1)^2}=y+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y+1)^2\le 16\\y\ge -4\\4x^2+3y^2=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y+1)^2\le 16 & (1)\\y\ge -4 & (2)\\\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1 & (3)\end{cases}.$

Tập hợp các điểm thỏa mãn (3) đều thỏa mãn (1) và (2).

Vậy tập hợp những điểm M là elip $(E):\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Bài toán 9

(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)

Cho số phức $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $\left|z\right| = 4$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = \left(3+4i\right)z + i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I\left(0;1\right), R = 2\sqrt{5}.$ B. $I\left(1;0\right), R = 20$

C. $I\left(0;1\right), R = 20.$ D. $I\left(1;-2\right), R = 22.$

Giải:

Đặt $w = a + bi$ với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

$$w = \left(3+4i\right)z + i \Leftrightarrow z = \frac{a+\left(b-1\right)i}{3+4i} = \frac{\left[a+\left(b-1\right)i\right]\left(3-4i\right)}{25}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3a+4b-4}{25} + \frac{\left(3b-4a-3\right)}{25}i \Rightarrow \left|z\right| = \frac{\sqrt{\left(3a+4b-4\right)^2+\left(3b-4a-3\right)^2}}{25}$$

Mà

$$\left|z\right| = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{\left(3a+4b-4\right)^2+\left(3b-4a-3\right)^2}}{25} = 4 \Leftrightarrow \left(3a+4b-4\right)^2+\left(3b-4a-3\right)^2 = 100^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \left(b-1\right)^2 = 20^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I\left(0;1\right), R = 20$.

Bài toán 10

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $\begin{cases} \left|z-3-6i\right| = \sqrt{5} \\ \left|\left(1+2i\right)z-1-12i\right| = 15 \end{cases}$?

Giải:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, do M thỏa mãn phương trình $\left|z-3-6i\right| = \sqrt{5}$ nên thuộc đường tròn tâm $A\left(3;6\right)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có: $\left|\left(1+2i\right)z-1-12i\right| = 15 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1+12i}{1+2i}\right| = \frac{15}{\left|1+2i\right|} \Leftrightarrow \left|z-5-2i\right| = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm $B\left(5;2\right)$, bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Nhận thấy $AB = \sqrt{\left(5-3\right)^2+\left(2-6\right)^2} = 2\sqrt{5} = R' - R$.

Vậy 2 đường tròn tiếp xúc trong tại M, hay chỉ có một số phức z thỏa mãn bài toán.

Bài toán 11

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Giải:

Cách 1:

Ta có: $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Rightarrow z=\dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i}\Rightarrow z-1=\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

Suy ra $\left|z-1\right|=\left|\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right|=\dfrac{\left|w-3-\sqrt{3}i\right|}{\left|1+\sqrt{3}i\right|}\Leftrightarrow 2=\dfrac{\left|w-3-\sqrt{3}i\right|}{2}\Leftrightarrow\left|w-3-\sqrt{3}i\right|=4$

Như vậy bán kính của đường tròn là 4.

Cách 2:

Ta có: $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Leftrightarrow w=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(z-1\right)+3+\sqrt{3}i\Leftrightarrow w-\left(3+\sqrt{3}i\right)=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(z-1\right)$.

Lấy môđun hai vế ta được: $\left|w-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|.\left|z-1\right|=2.2=4$.

Bài toán 12

Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w với $\left(3-2i\right)w=iz+2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn đó.

Giải:

Ta có $\left(3-2i\right)w=iz+2\Leftrightarrow w=\dfrac{i}{3-2i}z+\dfrac{2}{3-2i}\Leftrightarrow w=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)z+\dfrac{6}{13}+\dfrac{4}{13}i$

$\Leftrightarrow w=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)\left(z-1\right)+\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\Leftrightarrow w-\left(\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\right)=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)\left(z-1\right)$.

Lấy môđun, hai vế ta được $\left|w-\left(\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\right)\right|=\underbrace{\left|-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right|}_{\frac{1}{\sqrt{13}}}.\underbrace{\left|z-1\right|}_{3}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Vậy tập hợp các số phức w thuộc đường tròn tâm $I\left(\dfrac{4}{13};\dfrac{7}{13}\right)$, bán kính $r=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

<u>Nhận xét:</u> Bài này có rất nhiều cách giải tự luận nhưng cách này là tối ưu nhất. Quý thầy cô nên nghiên cứu kỹ phương pháp giải này để truyền đạt cho học sinh.

Bài toán 13

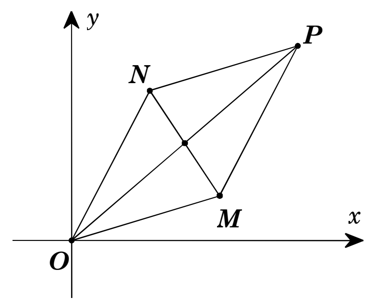
Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1\right| = \sqrt{3}$, $\left|z_2\right| = 2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm $M,\ N$. Biết góc tạo bởi giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 30^0. Tính giá trị của biểu thức $A = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right|$.

Giải:

Cách 1:

Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó $\begin{cases} \left|z_1 + z_2\right| = OP \\ \left|z_1 - z_2\right| = MN \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \left|z_1 + z_2\right| = \sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\right|\left|z_2\right|\cos 30^0} = \sqrt{13} \\ \left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\right|\left|z_2\right|\cos 150^0} = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1 + z_2\right|}{\left|z_1 - z_2\right|} = \sqrt{13}$.

__Nhận xét:__ Thầy cô nên giải thích rõ cho học sinh hiểu tại tại lại là góc 30^0 và góc 150^0.

Cách 2:

Giả sử $\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(a_1; b_1\right) \\ N\left(a_2, b_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \left(a_1; b_1\right) \\ \overrightarrow{ON} = \left(a_2; b_2\right) \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 3 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \end{cases}$ và

$$\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \cos 30^0 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 3.$$

Ta có $A = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right| = \dfrac{\left|\left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)i\right|}{\left|\left(a_1 - a_2\right) + \left(b_1 - b_2\right)i\right|} = \dfrac{\sqrt{\left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(b_1 + b_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1 - a_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 + b_2^2\right) + 2\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right)}}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 + b_2^2\right) - 2\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right)}} = \frac{\sqrt{3 + 4 + 2.3}}{\sqrt{3 + 4 - 2.3}} = \sqrt{13}.$$

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN- PLUS

Đây là một trong những bài toán điển hình nhất dùng máy tính CASIO để giải bài toán tìm tập hợp điểm của số phức. Các bài toán khác ta làm tương tự.

Bài toán 1

Trên mặt phẳng Oxy tìm tập hợp biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|zi-(2+i)|=2$

A. $x+2y-1=0$ B. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

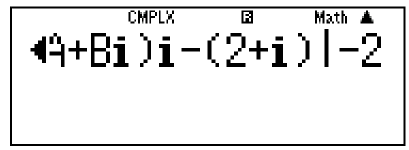
C. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ D. $3x+4y-2=0$

Hướng dẫn:

Ta giả sử: $z=A+Bi$.

Nên điều kiện của bài toán được viết lại là: $|(A+Bi)i-(2+i)|-2=0.$

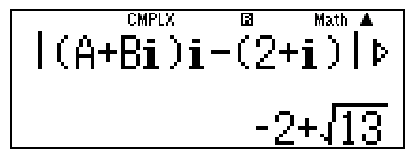
- MODE 2 và nhập điều kiện vào:



- Thử đáp án A. $x+2y-1=0x=1-2y$.

  Cho $y=1$ ta được $x=-1$.

  Nhập CALC − 1 = 1 = thu được kết quả khác 0.



  >>> Loại đáp án A.

- Thử đáp án B. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

  Cho $x=-1$ ta được $y=5$ hoặc $y=-1$.

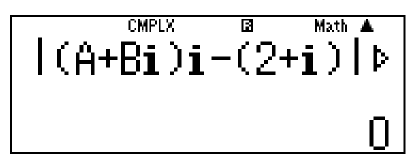
  CALC − 1 = 5 = ra kết quả khác 0.

  >>> Loại đáp án B

- Thử đáp án C. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

  Cho $x=1$ ta được $y=0$ và $y=-4$.

  CALC 1 = 0 = và CALC 1 = − 4 = đều được kết quả bằng 0.



Vậy đáp án đúng là **C.**

Bài toán 2

[Đề minh họa của bộ GD-ĐT lần 1-2017]
Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \left(3+4i\right)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$ **B.** $r = 5$ **C.** $r = 20$ **D.** $r = 22$

Hướng dẫn:

- Để xây dựng 1 đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w , vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa mãn $\left|z\right| = 4$
- Chọn $z = 4 + 0i$ (thỏa mãn $\left|z\right| = 4$). Tính $w_1 = \left(3+4i\right)\left(4+0i\right) + i$

  (3 + 4 ENG) × 4 + ENG =

  CMPLX Math ▲
  (3+4i)×4+i
  12+17i

  Ta có điểm biểu diễn của z_1 là $M\left(12;17\right)$
- Chọn $z = 4i$ (thỏa mãn $\left|z\right| = 4$). Tính $w_2 = \left(3+4i\right)\left(4i\right) + i$

  (3 + 4 ENG) × 4 ENG + ENG =

  CMPLX Math ▲
  (3+4i)×4i+i
  -16+13i

  Ta có điểm biểu diễn của z_2 là $N\left(-16;13\right)$
- Chọn $z = -4i$ (thỏa mãn $\left|z\right| = 4$). Tính $w_3 = \left(3+4i\right)\left(-4i\right) + i$

  (3 + 4 ENG) (− 4 ENG) + ENG =

  CMPLX Math ▲
  (3+4i)(-4i)+i
  16-11i

  Ta có điểm biểu diễn của z_3 là $P\left(16;-11\right)$

  Vậy ta có 3 điểm M, N, P thuộc đường tròn biểu diễn số phức w
- Đường tròn này sẽ có dạng tổng quát $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Để tìm a, b, c ta sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3

  MODE 5 2 1 2 = 1 7 = 1 = − 1 2 x^2 − 1 7 x^2 = − 1 6 =
  1 3 = 1 = − 1 6 x^2 − 1 3 x^2 = 1 6 = − 1 1 = 1 =
  − 1 6 x^2 − 1 1 x^2 = =

  X= 0   Y= -2   Z= -399

  Vậy phương trình đường tròn biểu diễn số phức w là:

$$x^2+y^2-2y-399=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=20^2.$$

Bán kính đường tròn tập hợp điểm biểu diễn số phức w là 20 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C.**

Bài toán 3

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2\left|z-1\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right|$ là một Parabol có dạng:

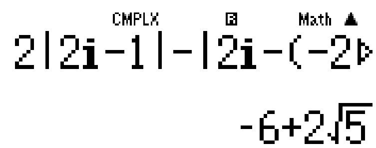
A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\dfrac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn:

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Nếu đáp số A đúng thì đúng với mọi $z=x+yi$ thỏa mãn $y=3x^2-6x+2$.
  Chọn một cặp $\left(x;y\right)$ bất kì thỏa $y=3x^2-6x+2$ ví dụ $A\left(0;2\right)\Rightarrow z=2i$

  Xét hiệu $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|$

  [2] [SHIFT] [hyp] [2] [ENG] [−] [1] [▶] [−] [SHIFT] [hyp] [2] [ENG] [−] [(] [−] [2] [ENG] [)] [+] [2] [ENG] [=]

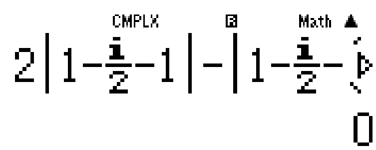


  Vậy $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|=-6+2\sqrt{5}\neq 0$

  $\Rightarrow 2\left|z-1\right|\neq\left|z-\bar{z}+2i\right|\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự với đáp số B chọn $z=1-\dfrac{1}{2}i$. Xét hiệu $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|$

  [2] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [$\frac{\square}{\square}$] [ENG] [▼] [2] [▶] [−] [1] [▶] [−] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [$\frac{\square}{\square}$] [ENG]
  [▼] [2] [▶] [−] [(] [1] [+] [$\frac{\square}{\square}$] [ENG] [▼] [2] [▶] [)] [+] [2] [ENG] [=]



  Vậy $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|=0\Rightarrow 2\left|z-1\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right|\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác.

IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là:

A. $(6;\ -7)$. **B.** $(6;\ 7)$. **C.** $(-6;\ 7)$. **D.** $(-6;\ -7)$.

Câu 2. Điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{2}{1-3i}$ là

A. $(1;-3)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(4;-1)$.

Câu 3. Số phức $z = \dfrac{3-4i}{2}$ có điểm biểu diễn là:

A. $\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$. **B.** $(3;\ 4)$. **C.** $(-3;-4)$. **D.** $(-3;\ 4)$.

Câu 4. Cho số phức $z = \sqrt{3}i - 2$ có điểm biểu diễn hình học là:

A. $(-2;\sqrt{3})$. **B.** $(\sqrt{3};2)$. **C.** $(-2;3)$. **D.** $(-2;-\sqrt{3})$.

Câu 5. Biểu diễn về dạng $z = a + bi$ của số phức $z = \dfrac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?

A. $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$. **B.** $-\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$. **C.** $\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$. **D.** $-\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$.

Câu 6. Điểm M biểu diễn số phức $z = \dfrac{3+4i}{i^{2019}}$ có tọa độ là

A. $M(4;-3)$ **B.** $M(3;-4)$ **C.** $M(3;4)$ **D.** $M(-4;3)$

Câu 7. Điểm biểu diễn số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ có tọa độ là

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;-4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(-1;4)$.

Câu 8. Điểm biểu diễn hình học của số phức $z = a + ai$ nằm trên đường thẳng:

A. $y = x$ **B.** $y = 2x$ **C.** $y = -x$ **D.** $y = -2x$

Câu 9. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $5 + 8i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $-5 + 8i$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O.

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 10. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 5i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = -2 + 5i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành

B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu 11. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 2i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = 2 + 3i$ Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O.

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho số phức $z = x + yi \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua

A. trục Ox.
B. trục Oy.
C. gốc tọa độ O.
D. đường thẳng $y = x$.

Câu 13. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$, nằm trên đường thẳng có phương trình là:

A. $x = 7$.
B. $y = 7$.
C. $y = x$.
D. $y = x + 7$.

Câu 14. Điểm biểu diễn của các số phức $z = n - ni$ với $n \in \mathbb{R}$, nằm trên đường thẳng có phương trình là:

A. $y = 2x$.
B. $y = -2x$.
C. $y = x$.
D. $y = -x$.

Câu 15. Cho số phức $z = a + a^2 i$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm biểu diễn của số phức liên hợp của z nằm trên:

A. Đường thẳng $y = 2x$.
B. Đường thẳng $y = -x + 1$.
C. Parabol $y = x^2$.
D. Parabol $y = -x^2$.

Câu 16. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z - i\right| = 1$ là:

A. Một đường thẳng.
B. Một đường tròn.
C. Một đoạn thẳng.
D. Một hình vuông.

Câu 17. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, $z_3 = 4 + i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành là:

A. $2 + 3i$.
B. $2 - i$..
C. $2 + 3i$..
D. $3 + 5i$..

Câu 18. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:

A. $MN = 4$..
B. $MN = 5$.
C. $MN = -2\sqrt{5}$.
D. $MN = 2\sqrt{5}$.

Câu 19. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k = x + yi$ trên mặt phẳng phức. Khi đó tập hợp điểm P trên mặt phẳng phức để tam giác MNP vuông tại P là:

A. đường thẳng có phương trình $y = x - \sqrt{5}$.

B. là đường tròn có phương trình $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.

C. là đường tròn có phương trình $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$, nhưng không chứa M, N.

D. là đường tròn có phương trình $x^2 - 4x + y^2 - 1 = 0$ nhưng không chứa M, N.

Câu 20. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng:

A. $|z_1| - |z_2|$. **B.** $|z_1| + |z_2|$. **C.** $|z_2 - z_1|$. **D.** $|z_2 + z_1|$.

Câu 21. Biết $|z - i| = |(1+i)z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trinh

A. $x^2 + +y^2 + 2y + 1 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$. **D.** $x^2y^2 - 2y - 1 = 0$.

Câu 22. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z, biết $|3zi + 4| = \sqrt{2}$ là

A. điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đường tròn. **D.** elip.

Câu 23. Trong mặt phẳng phức cho ΔABC vuông tại C. Biết rằng A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -2 + 4i$. Khi đó, C biểu diễn số phức:

A. $z = 2 + 4i$. **B.** $z = -2 + 2i$. **C.** $z = 2 - 4i$. **D.** $z = -2 - 2i$.

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $|zi - (2+i)| = 2$ là:

A. $3x + 4y - 2 = 0$. **B.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. **D.** $x + 2y - 1 = 0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |(1+i)z|$ là:

A. Đường tròn có tâm $I(0;-1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$

B. Đường tròn có tâm $I(0;1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$

C. Đường tròn có tâm $I(1;0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$

D. Đường tròn có tâm $I(-1;0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$

Câu 26. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = 4$ là:

A. Một đường thẳng **B.** Một đường tròn

C. Một đoạn thẳng **D.** Một hình vuông

Câu 27. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện z^2 là một số thực âm là:

A. Trục hoành (trừ gốc O). **B.** Đường thẳng $y = x$ (trừ gốc O).

C. Trục tung (trừ gốc O). **D.** Đường thẳng $y = -x$ (trừ gốc O).

Câu 28. Giả sử M là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau đây: $|z - 1 + i| = 2$ là một đường tròn:

A. Có tâm $(-1; -1)$ và bán kính là 2. **B.** Có tâm $(1; -1)$ và bán kính là $\sqrt{2}$.

C. Có tâm $(-1; 1)$ và bán kính là 2. **D.** Có tâm $(1; -1)$ và bán kính là 2.

Câu 29. Giả sử $M\left(z\right)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tập hợp các điểm $M\left(z\right)$ thoả mãn điều kiện sau đây: $\left|2+z\right|=\left|1-i\right|$ là một đường thẳng có phương trình:

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $-4x+2y+3=0$.

C. $4x-2y-3=0$. **D.** $2x+y+2=0$.

Câu 30. Tập hợp các điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện sau đây: $\left|z+\bar{z}+3\right|=4$ là hai đường thẳng:

A. $x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=-\dfrac{7}{2}$.

C. $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{7}{2}$. **D.** $x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{7}{2}$.

Câu 31. Tập hợp các điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện sau đây: $\left|z+\bar{z}+1-i\right|=2$ là hai đường thẳng:

A. $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

C. $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ và $y=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32. Cho số phức $z=x+y.i(x,y\in\mathbb{R})$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z sao cho $\dfrac{z+i}{z-i}$ là một số thực âm là:

A. Các điểm trên trục hoành với $-1<x<1$.

B. Các điểm trên trục tung với $-1<y<1$.

C. Các điểm trên trục hoành với $\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.$.

D. Các điểm trên trục tung với $\left[\begin{array}{l}y\le -1\\ y\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 33. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=1+5i$, $z_2=3-i$, $z=6$. $M,\ N,\ P$ là 3 đỉnh của tam giác có tính chất:

A. Vuông. **B.** Vuông cân. **C.** Cân. **D.** Đều.

Câu 34. Gọi $A,\ B,\ C,\ D$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=7-3i$, $z_2=8+4i$, $z_3=1+5i$, $z_4=-2i$. Tứ giác $ABCD$ là:

A. là hình vuông. **B.** là hình thoi.

C. là hình chữ nhật. **D.** là hình bình hành.

Câu 35. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=-1+3i; z_2=-3-2i; z_3=4+i$. Chọn kết luận **sai**:

A. Tam giác ABC vuông cân. **B.** Tam giác ABC cân.

C. Tam giác ABC vuông. **D.** Tam giác ABC đều.

Câu 36. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z thoả mãn $\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=4$ có dạng là

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
C. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 37. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1=3+2i, z_2=2-3i, z_3=5+4i$

Chu vi của tam giác ABC là :

A. $\sqrt{22}+\sqrt{2}+\sqrt{58}$.
B. $\sqrt{26}+\sqrt{2}+\sqrt{58}$.
C. $\sqrt{22}+2\sqrt{2}+\sqrt{56}$.
D. $\sqrt{26}+2\sqrt{2}+\sqrt{58}$.

Câu 38. Cho các điểm A,B,C trong mặt phẳng phức theo thứ tự được biểu diễn bởi các số: $1+i;2+4i;6+5i$. Tìm số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành:

A. $7+8i$.
B. $5+2i$.
C. -3.
D. $-3+8i$.

Câu 39. Cho $A,\ B,\ M$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $-4;\ 4i;\ x+3i$. Với giá trị thực nào của x thì $A,\ B,\ M$ thẳng hàng :

A. $x=1$.
B. $x=-2$.
C. $x=-1$.
D. $x=2$.

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A biểu diễn số phức $z_1=1+2i$, B là điểm thuộc đường thẳng $y=2$ sao cho tam giác OAB cân tại O. B biểu diễn số phức nào sau đây:

A. $z=-1+2i$.
B. $z=2-i$.
C. $z=1-2i$.
D. $z=-1-2i$.

Câu 41. Cho các số phức $z_1=1+3i; z_2=-2+2i; z_3=-1-i$ được biểu diễn lần lượt bởi các điểm $A,\ B,\ C$ trên mặt phẳng. Gọi M là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M biểu diễn số phức:

A. $z=-6i$.
B. $z=2$.
C. $z=-2$.
D. $z=6i$.

Câu 42. Tromg mặt phẳng phức cho hai điểm $A(4;0)$, $B(0;-3)$. Điểm C thỏa mãn: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Khi đó điểm C biểu diễn số phức:

A. $z=4-3i$.
B. $z=-3-4i$.
C. $z=-3+4i$.
D. $z=4+3i$.

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-(3-4i)\right|=2$ là:

A. $x=5$.
B. $(x-3)^2+(y+4)^2=4$.
C. $y=-2$.
D. $x^2+y^2=4$.

Câu 44. Cho $A,\ B,\ C$ là ba điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số: $-1+i;-1-i;2i$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. – 7.
B. 5.

C. -2. **D.** -6.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức ω thỏa mãn điều kiện $\omega = (1-2i)z+3$, biết z là số phức thỏa mãn $|z+2| = 5$.

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 125$. **B.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 125$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 125$. **D.** $x = 2$.

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1A	2B	3A	4A	5D	6D	7B	8A	9B	10B	11D	12A	13A	14D	15C
16B	17A	18D	19D	20C	21B	22C	23A	24C	25D	26B	27C	28A	29A	30B
31A	32B	33A	34A	35D	36A	37D	38A	39C	40A	41D	42A	43B	44D	45A

Câu 1. Chọn A.

Câu 2. Ta có $z = \dfrac{2}{1-3i} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$. **Chọn B.**

Câu 3. Số phức $z = \dfrac{3-4i}{2} = \dfrac{3}{2} - 2i$ có tọa độ điểm biểu diễn là $\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$. **Chọn A.**

Câu 4. Số phức..có tọa độ điểm biểu diễn là $\left(-2;\sqrt{3}\right)$. **Chọn A.**

Câu 5. Ta có $z = \dfrac{i^{2016}}{(1+2i)^2} = -\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$ (Dùng Casio). **Chọn D.**

Câu 6. $i^{2019} = i^{4.504+3} = i^3 = -i, z = -4+3i$. Suy ra điểm biểu diễn có tọa độ là $(-4;3)$. **Chọn D.**

Câu 7. Ta có $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i} = -1-4i$. **Chọn B.**

Câu 8. Ta có: $M(a;a)$ biểu diễn nên $z = a + ai$. **Chọn A.**

Câu 9. Tọa độ điểm $A(5;8), B(-5;8)$ ta thấy hai điểm đối xứng nhau qua trục tung (Oy). **Chọn B.**

Câu 10. Ta có: $(2;5)$ & $(-2;5)$ biểu diễn 2 số phức trên đối xứng qua Oy nên **Chọn B.**

Câu 11. $z = 3+2i \Rightarrow A(3;2)$; $z' = 2+3i \Rightarrow B(2;3)$

$M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm AB nằm trên $y = x$ và $AB \perp d : y = x$. **Chọn D.**

Câu 12. Số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$. Số phức $\overline{z} = x - yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M'(x;-y) \Rightarrow$ M, M' đối xứng qua Ox. **Chọn A.**

Câu 13. Điểm biểu diễn của các số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$ là $M(7;b)$ nằm trên đường thẳng $x = 7$. **Chọn A.**

Câu 14. Điểm biểu diễn của các số phức $z = n - ni$ với $n \in \mathbb{R}$ là điểm $M\left(\mathrm{n}, -\mathrm{n}\right)$ nằm trên đường thẳng có phương trình là: $y = -x$. **Chọn D.**

Câu 15. Điểm biểu diễn của các số phức $z = a + a^2 i$ với $a \in \mathbb{R}$ là điểm $M\left(a, a^2\right)$ nằm trên đường có phương trình là: $y = x^2$. **Chọn C.**

Câu 16. Chọn B.

Câu 17. Gọi $D\left(x;y;z\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $A\left(-1;3\right); B\left(1;5\right); C\left(4;1\right)$

$ABCD$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 2 \\ 1 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i$. **Chọn A.**

Câu 18. Hai nghiệm phức của phương trình đã cho là $z_1 = 2 + \sqrt{5}i; z_2 = 2 - \sqrt{5}i$.

Nên $M\left(2;\sqrt{5}\right), N\left(2;-\sqrt{5}\right) \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$. **Chọn D.**

Câu 19. $M\left(2;\sqrt{5}\right), N\left(2;-\sqrt{5}\right)$; $P\left(x;y\right)$. Tam giác MNP vuông tại P, nên

$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 1 = 0$. **Chọn D.**

Câu 20. Giả sử: $A\left(x_1;y_1\right); B\left(x_2;y_2\right)$ là điểm biểu diễn hai số phức

$z_1 = x_1 + y_1 i; z_2 = x_2 + y_2 i; \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right) \\ z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + \left(y_2 - y_1\right)i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \\ \left|z_2 - z_1\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 21. Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi; \forall x; y \in \mathbb{R}$.

$\left|z - i\right| = \left|\left(1 + i\right)z\right| \Leftrightarrow \left|x + \left(y - 1\right)i\right| = \left|\left(1 + i\right)\left(x + yi\right)\right| \Leftrightarrow \left|x + \left(y - 1\right)i\right| = \left|x - y + \left(x + y\right)i\right|$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - 1\right)^2 = \left(x - y\right)^2 + \left(x + y\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y + y^2 - 1 = 0$ **Chọn B.**

Câu 22. Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi; \forall x; y \in \mathbb{R}$.

$\left|3zi + 4\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|3i\left(x + yi\right) + 4\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|4 - 3y + 3xi\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left(4 - 3y\right)^2 + 9x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ **Chọn C.**

Câu 23. $A\left(2;-2\right); B\left(-2;4\right); C\left(x;y\right)$;

ΔABC vuông tại C nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2\right)\left(x + 2\right) + \left(y + 2\right)\left(y - 4\right) = 0$. **Chọn A.**

Câu 24. Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi; \forall x; y \in \mathbb{R}$.

$\left|zi - \left(2 + i\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|-2 - y + \left(x - 1\right)i\right| = 2 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 + \left(y + 2\right)^2 = 4$. **Chọn C.**

Câu 25. Gọi điểm $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Ta có: $|z-1| = |(1+i)z| \Leftrightarrow |x+yi-1| = |(1+i)(x+yi)| \Leftrightarrow |(x-1)+yi| = |(x-y)+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có: $|z-i| = 1 \Leftrightarrow |x+yi-i| = 1 \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ là đường tròn . **Chọn D.**

Câu 26. Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có: $|z-1+2i| = 4 \Leftrightarrow |x+yi-1+2i| = 4 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ là đường tròn . **Chọn B.**

Câu 27. Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn số phức z là $M(a;b)$.

Khi đó $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

z^2 là một số thực âm khi $\begin{cases} a^2 - b^2 < 0 \\ a.b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;b), (b \neq 0)$

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là trục tung (trừ gốc tọa độ O). **Chọn C.**

Câu 28. Xét hệ thức: $|z-1+i| = 2$ (1). Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M trên mặt phẳng toạ độ biểu diễn số phức z thoả mãn (1) là đường tròn có tâm tại $I(1;-1)$ và bán kính $R = 2$. **Chọn A.**

Câu 29. Xét hệ thức $|2+z| = |z-i| \Leftrightarrow |z-(-2)| = |z-i|$ (*)

Gọi A là điểm biểu diễn số -2, còn B là điểm biểu diễn số phức $i: A(-2;0), B(0;1)$

Đẳng thức (*) chứng tỏ $M(z)A = M(z)B$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm $M(z)$ chính là đường trung trực của AB.

Chú ý: Ta có thể giải cách khác như sau:

Giả sử $z = x + yi$, khi đó:

(2) $\Leftrightarrow |(x+2)+yi| = |-x+(1-y)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0$

Vậy tập hợp các điểm $M(z)$ là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$. **Chọn A.**

Nhận xét: Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$ chính là phương trình đường trung trực của đoạn AB.

Câu 30. Xét hệ thức: $|z + \bar{z} + 3| = 4$ (1)

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$, do đó $\Leftrightarrow |(x+yi) + (x-yi) + 3| = 4$

$\Leftrightarrow |2x+3| = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{7}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là hai đường thẳng song song với trục tung $x=\frac{1}{2}$ và $x=-\frac{7}{2}$.

Chọn B.

Câu 31. Xét hệ thức: $\left|z+\bar{z}+1-i\right|=2$. Đặt $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \left|1+\left(2y-1\right)i\right|=2 \Leftrightarrow 1+\left(2y-1\right)^2=4 \Leftrightarrow 2y^2-2y-1=0$

$\Leftrightarrow y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 32. $\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+\left(y+1\right)i}{x+\left(y-1\right)i}=\frac{\left[x+\left(y+1\right)i\right]\left[x-\left(y-1\right)i\right]}{x^2+\left(y-1\right)^2}=\frac{x^2+\left(y^2-1\right)}{x^2+\left(y-1\right)^2}+\frac{2x}{x^2+\left(y-1\right)^2}i$

$\frac{z+i}{z-i}$ là một số thực âm khi $\begin{cases}\frac{x^2+\left(y^2-1\right)}{x^2+\left(y-1\right)^2}<0\\ \frac{2x}{x^2+\left(y-1\right)^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y^2-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ -1<y<1\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 33. $z_1=1+5i \Rightarrow M\left(1;5\right)$; $z_2=3-i \Rightarrow N\left(3;-1\right)$; $z_3=6 \Rightarrow P\left(6;0\right)\infty$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(2;-6\right),\overrightarrow{NP}=\left(3;1\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=2.3-6.1=0, MN=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}, NP=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}\neq MN$

Vậy ΔMNP là tam giác vuông tại N. **Chọn A.**

Câu 34. $z_1=7-3i \Rightarrow A\left(7;-3\right)$; $z_2=8+4i \Rightarrow B\left(8;4\right)$

$z_3=1+5i \Rightarrow C\left(1;5\right)$; $z_4=-2i \Rightarrow D\left(0;-2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(1;7\right),\overrightarrow{BC}=\left(-7;1\right) \Rightarrow \begin{cases}AB=BC\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$

Vậy $ABCD$ là hình vuông. **Chọn A.**

Câu 35. $z_1=-1+3i \Rightarrow A\left(-1;3\right)$; $z_2=-3-2i \Rightarrow B\left(-3;-2\right)$; $z_3=4+i \Rightarrow C\left(4;1\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(-2;-5\right),\overrightarrow{AC}=\left(5;-2\right) \Rightarrow \begin{cases}AB=AC\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A. **Chọn D.**

Câu 36. Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Suy ra $M\left(x;\ y\right)$ biểu diễn dố phức z.

Ta có: $\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=4 \Leftrightarrow \left|x+yi-i\right|+\left|x+yi+i\right|=4$

$\Leftrightarrow \left|x+\left(y-1\right)i\right|+\left|x+\left(y+1\right)i\right|=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}=4\ (*)$

Đặt $F_1(0;-1)$, $F_2(0;1)$. Thì $(*) \Leftrightarrow MF_2 + MF_1 = 4 > 2 = F_1F_2$. Suy ra tập hợp các điểm M là elip (E) có 2 tiêu điểm F_1, F_2. Phương trình chính tắc của (E) có dạng

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > b > 0;\ b^2 = a^2 - c^2\right)$

Ta có : $F_1F_2 = 2c = 2 \Rightarrow c = 1$, $MF_2 + MF_1 = 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. **Chọn A.**

Câu 37. $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow A(3;2)$; $z_2 = 2 - 3i \Rightarrow B(2;-3)$; $z_3 = 5 + 4i \Rightarrow C(5;4)$

Suy ra ta được $\overrightarrow{AB} = (-1;-5), \overrightarrow{BC} = (3;7), \overrightarrow{AC} = (2;2)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}, BC = \sqrt{3^2 + 7^2} = 58, AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Vậy $ChuVi_{\Delta ABC} = \sqrt{26} + 2\sqrt{2} + \sqrt{58}$. **Chọn D.**

Câu 38. Theo giả thiết ta có $A(1;1), B(2;4), C(6;5)$

Gọi $D(x;y)$, khi đó $\overrightarrow{AB} = (1;3), \overrightarrow{CD} = (x-6; y-5)$

Tứ giá $ABDC$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - 6 \\ 3 = y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 39: Theo giả thiết ta có $A(-4;0), B(0;4), C(x;3)$.Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;4), \overrightarrow{AC} = (x+4;3)$.

A, B, M thẳng hằng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow k = \frac{x+4}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$. **Chọn C.**

Câu 40.

Cách 1.

Theo giả thiết $A(1;2), B(x;2), x \neq 1$ thì B biểu diễn số phức $z = x + 2i$.

Tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow OB^2 = OA^2 \Leftrightarrow x^2 + 2^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại) hoặc $x = -1$ (nhận)

Vậy $z = -1 + 2i$.

Cách 2.

Dễ thấy A, B cùng nằm trên $d: y = 2$ nên tam giác OAB cân tại O khi và chỉ khi A, B đối xứng qua Oy. Vậy $B(-1;2)$ và do đó $z = -1 + 2i$. **Chọn A.**

Câu 41. Gọi $M(x;y), x, y \in \mathbb{R}$ thì M biểu diễn cho số phức $z = x + yi$.

Theo giả thiết $A(1;3), B(-2;2), C(-1;-1)$.

Từ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$. Vậy $z = 6i$. **Chọn D.**

Câu 42. Gọi $C(x;y), x, y \in \mathbb{R}$ thì C biểu diễn cho số phức $z = x + yi$.

$\overrightarrow{OA} = (4;0)$, $\overrightarrow{OB} = (0;-3)$. Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4;-3)$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (4;-3) \Rightarrow C(4;-3)$.Vậy $z = 4 - 3i$. **Chọn A.**

Câu 43: Gọi $M(x;y), x,y \in \mathbb{R}$ thì M biểu diễn cho số phức $z = x + yi$.

Ta có

$\left|z - (3-4i)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|(x-3) + (y+4)i\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.

Chọn **B**.

Câu 44. Ta có $A(-1;1), B(-1;-1), C(0;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (0;-2), \overrightarrow{BC} = (1;3)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (0).(1) + (-2).(3) = -6$. **Chọn D.**

Câu 45. Gọi $M(x;y), x,y \in \mathbb{R}$ thì M biểu diễn cho số phức $\omega = x + yi$.

$\omega = (1-2i)z + 3 \Rightarrow z = \dfrac{x-3+yi}{1-2i} = \dfrac{x-2y-3}{5} + \dfrac{2x+y-6}{5}i$.

Theo giả thiết $|z+2| = 5 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-2y+7}{5} + \dfrac{2x+y-6}{5}i\right| = 5 \Leftrightarrow (x-2y+7)^2 + (2x+y-6)^2 = 625$

Suy ra $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 125$. **Chọn A.**

D. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP QUY VỀ TÌM MIN-MAX CỦA HÀM MỘT BIẾN KẾT HỢP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC.

Phương pháp 1

Bài toán: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện T. Tìm số phức z để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Phương pháp tổng quát: Đặt $z = x + yi\ \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

Từ điều kiện T, biến đổi để tìm cách rút ẩn rồi thế vào biểu thức P để được hàm một biến. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tuỳ theo yêu cầu bài toán của hàm số một biến vừa tìm được.

Phương pháp 2

Sử dụngcác tính chất và các bất đẳng thức về môđun của số phức sau để giải quyết các bài toán min-max:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

- $\left|z\right| \ge 0; \left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
- $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2,\ \left|-z\right| = \left|z\right|,\ \left|\overline{z}\right| = \left|z\right|$
- $\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
- $\left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \le \left|z - z'\right| \le \left|z\right| + \left|z'\right|$
- $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$

Kết hợp sử dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, BĐT Bunhia- Cốpxki.

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a, b, x, y ta luôn có

  $\left(ax + by\right)^2 \le \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vecto** : Cho 2 vecto $\vec{u}\left(x; y\right)$ và $\vec{v}\left(x'; y'\right)$ ta luôn có $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\overrightarrow{u + v}\right|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \ge \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2}$

  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} < 0$

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z+1-5i\right| = \left|\overline{z}+3-i\right|$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

$\left|z+1-5i\right| = \left|\overline{z}+3-i\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - 3y$.

$\left|z\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(4-3y)^2+y^2} = \sqrt{10y^2-24y+16} = \sqrt{10\left(y-\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{8}{5}} \geq \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $y = \dfrac{6}{5} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $\left|z\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ khi $z = \dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}i$. Vậy $z = \dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}i$ là số phức cần tìm.

Bài toán 2

Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right| = m^2+2m+5$, với m là tham số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \left(3-4i\right)z - 2i$ là một đường tròn. Bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó bằng?

Giải :

Cách 1 : Gọi $w = x + yi$.

Từ giả thiết, ta có $x + yi = \left(3-4i\right)z - 2i \Rightarrow z = \dfrac{x+\left(y+2\right)i}{3-4i} = \dfrac{3x-4y-8}{25} + \dfrac{4x+3y+6}{25}.i$

$\Rightarrow \left|z\right| = \dfrac{\sqrt{\left(3x-4y-8\right)^2+\left(4x+3y+6\right)^2}}{25}$.

Mà $\left|z\right| = m^2+2m+5 \Leftrightarrow \left(3x-4y-8\right)^2+\left(4x+3y+6\right)^2 = 25^2\left(m^2+2m+25\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4 = 25\left[\left(m+1\right)^2+4\right]^2 \Leftrightarrow x^2+\left(y+2\right)^2 = 25\left[\left(m+1\right)^2+4\right]^2 \geq 400 = 20^2$.

Vậy bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó là 20. Dấu "=" xảy ra khi $m = -1$.

Cách 2: Từ giả thiết, ta có $w + 2i = \left(3-4i\right)z$.

Lấy môđun hai vế, ta được $\left|w+2i\right| = \left|3-4i\right|.\left|z\right| = 5.\left(m^2+2m+5\right) = 5\left[\left(m+1\right)^2+4\right] \geq 20$.

Bài toán 3

Trong các số phức z có phần thực, phần ảo không âm và thoả mãn: $\left|\dfrac{z-3}{z-1+2i}\right|=1$.

Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z^2-\overline{z}^2\right|-\left(z^2-\overline{z}^2\right).i.\left[z(1-i)+\overline{z}(1+i)\right]$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Điều kiện: $z\neq 1-2i$. Gọi $z=x+yi \quad \left(x;y\in\mathbb{R}_+^*\right)$.

$$\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right|=1\Leftrightarrow\frac{\left|z-3\right|}{\left|z-1+2i\right|}=1\Leftrightarrow\left|z-3\right|=\left|z-1+2i\right|\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x+y=1$$

(luôn thoả mãn điều kiện vì $x=1;y=-2$ không thoả mãn phương trình)

$\overline{z}=x-yi \Rightarrow z^2-\overline{z}^2=4xy.i \Rightarrow \left|z^2-\overline{z}^2\right|=4xy$ (vì $x;y$ không âm).

$z(1-i)+\overline{z}(1+i)=2x+2y$

Do đó $P=16x^2y^2+4xy.(2x+2y)=16x^2y^2+8xy$.

Đặt $t=xy\Rightarrow 0\leq t\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, ta có $P=16t^2+8t;t\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

+ Xét hàm số $f(t)=16t^2+8t$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

$f'(t)=32t+8t;f'(t)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=-\dfrac{1}{4}$(loại)

$f(0)=0;f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{33}{16}\Rightarrow\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]}f(t)=\dfrac{33}{16}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4};\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]}f(t)=0\Leftrightarrow t=0$

Khi $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$; Khi $t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;y=1\\x=1;y=0\end{array}\right.$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{33}{16}$ khi $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $z=1\vee z=0$.

Nhận xét: Bài tập này cũng có thể giải được bằng cách rút $y=1-x$ và thế vào biểu thức P ta được hàm số $g(x)=16x^2(1-x)^2+8x(1-x)$ rồi đi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $\left[0;1\right]$.

Bài toán 4

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải:

Giả sử số phức z cần tìm có dạng $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(x;y).

Ta có $\left|x-2+(y-4)i\right| = \left|x+(y-2)i\right|$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow y = -x+4$.

Mặt khác $\left|z\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+x^2-8x+16} = \sqrt{2x^2-8x+16}$

Hay $\left|z\right| = \sqrt{2\left(x-2\right)^2+8} \geq 2\sqrt{2}$. Do đó $\left|z\right|_{\min} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2$. Vậy $z = 2+2i$.

Bài toán 5

Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z\right| = 1$. Tìm số phức z để $\left|1+z\right| + 3\left|1-z\right|$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Giả sử $z = x+yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Vì $\left|z\right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$

Khi đó:

$$\left|1+z\right| + 3\left|1-z\right| = \sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2} + 3\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}$$
$$= \sqrt{\left(x+1\right)^2+1-x^2} + 3\sqrt{\left(x+1\right)^2+1-x^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ ta có:

$$f'\left(x\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{3}{2\sqrt{1-x}}\right); f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Ta có: $f\left(-1\right) = 6; f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}$.

Vậy $f_{\max} = f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5} \\ y^2 = 1-x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5}; y = -\frac{3}{5} \\ x = -\frac{4}{5}; y = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy $z = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i, z = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

Bài toán 6

Trong các số phức z thỏa: $\left|\overline{z}-3+4i\right| = \left|z\right|$, biết rằng số phức $z = a+bi, \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P = a^2 - b$ là ?

Giải:

Ta có $\left|\overline{z}-3+4i\right| = \left|z\right| \Leftrightarrow \left|a-bi-3+4i\right| = \left|a+bi\right|$

$$\Rightarrow \left(a-3\right)^2 + \left(b-4\right)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow 25-6a-8b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{25-6a}{8}$$

$$\Rightarrow \left|z\right|^2 = a^2 + \left(\frac{25-6a}{8}\right)^2 = \frac{25}{16}a^2 - \frac{75}{16}a + \frac{625}{64} = \left(\frac{5}{4}a - \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq \frac{25}{4}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 2$.

Khi đó $P = a^2 - b = \frac{1}{4}$.

Bài toán 7

Cho số phức thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$.

Giải :

Đặt $z = a + bi\ (a;b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$+\ \ |z+1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{2(a+1)}$

$$+\ \ |z^2 - z + 1| = |(a^2 + 2abi - b^2) - (a+bi) + a^2 + b^2| = |(2a^2 - a) + (2a-1)bi|$$
$$= \sqrt{(2a^2 - a)^2 + (2a-1)^2 b^2}$$
$$= \sqrt{(2a-1)^2 (a^2 + b^2)} = |2a - 1|$$

Vậy $P = \sqrt{2(a+1)} + |2a-1|$.

Xét $a \in \left[\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P(1) = 3 \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$. Xét $a \in \left[-1;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P\left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{13}{4} \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}$

Kết luận $\begin{cases} Max\ P_{|z|=1} = \frac{13}{4} \Rightarrow z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8} i \\ Min\ P_{|z|=1} = \sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$

Bài toán 8

Số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|\frac{z+i}{z}\right|$.

Giải:

Ta có $1 - \left|\frac{i}{z}\right| \leq \left|1 + \frac{i}{z}\right| \leq 1 + \left|\frac{i}{z}\right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq \left|1 + \frac{i}{z}\right| \leq 1 + \frac{1}{|z|}$.

Mặt khác $|z| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Bài toán 9

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|\bar{z}+1+i\right|$

Giải:

Ta có: $\left|z-2-3i\right|=\left|\overline{z-2-3i}\right|=\left|\bar{z}-\overline{2+3i}\right|=\left|\bar{z}-2+3i\right|=1$

$P=\left|\bar{z}+1+i\right|=\left|\bar{z}-2+3i+3-2i\right|\le\left|\bar{z}-2+3i\right|+\left|3-2i\right|=1+\sqrt{13}$. Vậy $P_{\max}=1+\sqrt{13}$.

Bài toán 10

Trong các số phức z thoả mãn $\left|z-3+4i\right|=4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$ và xảy ra khi z bằng bao nhiêu?

Giải:

Ta có : $\left|z-3+4i\right|=\left|z-(3-4i)\right|\ge\left|\left|z\right|-\left|3-4i\right|\right|=\left|\left|z\right|-5\right|$

$\Rightarrow 4\ge\left|\left|z\right|-5\right|\Leftrightarrow -4\le\left|z\right|-5\le 4\Leftrightarrow 1\le\left|z\right|\le 9\Rightarrow \max_{|z|}=9$ và $\min_{|z|}=1$

Đặt $z=x+yi\quad (x;y\in\mathbb{R})$

- TH $\max_{|z|}=9$

$$\begin{cases}\left|z\right|=9\\ \left|z-3+4i\right|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=81\\ (x-3)^2+(y+4)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=81\\ 3x-4y=45\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $x=\frac{27}{5};\mathrm{y}=-\frac{36}{5}\Rightarrow z=\frac{27}{5}-\frac{36}{5}i$.

Vậy $\max_{|z|}=9\Leftrightarrow z=\frac{27}{5}-\frac{36}{5}i$.

- TH $\min_{|z|}=1$

$$\begin{cases}\left|z\right|=1\\ \left|z-3+4i\right|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ (x-3)^2+(y+4)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 3x-4y=45\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $x=\frac{3}{5};\mathrm{y}=-\frac{4}{5}\Rightarrow z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

Vậy $\min_{|z|}=1\Leftrightarrow z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

Bài toán 11

Cho số phức z thỏa mãn $\left|\left(2+i\right)z+1\right|=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z-1\right|$ bằng bao nhiêu ?

Giải:

Ta có $\left|\left(2+i\right)z+1\right|=1\Leftrightarrow\frac{\left|\left(2+i\right)z+1\right|}{\left|2+i\right|}=\frac{1}{\left|2+i\right|}\Leftrightarrow\left|z+\frac{1}{2+i}\right|=\left|z+\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\left|z+\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right|=\left|z-1-\left(-\frac{7}{5}+\frac{i}{5}\right)\right|\ge\left\|z-1\right|-\left|-\frac{7}{5}+\frac{i}{5}\right\|=\left\|z-1\right|-\sqrt{2}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}\ge\left\|z-1\right|-\sqrt{2}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}\ge\left|z-1\right|-\sqrt{2}\ge-\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{2}\ge\left|z-1\right|\ge\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\left|z-1\right|_{\max}+\left|z-1\right|_{\min}=2\sqrt{2}$.

Bài toán 12

Cho số phức z thỏa mãn $\left|\bar{z}-1+2i\right|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z+1-4i\right|$ bằng bao nhiêu ?

Giải:

Ta có $\left|\bar{z}-1+2i\right|=\left|\bar{z}-\overline{1+2i}\right|=\left|\overline{z-(1+2i)}\right|=\left|\overline{z-1-2i}\right|=\left|z-1-2i\right|=\sqrt{10}$

Lại có : $\left|z-1-2i\right|=\left|\left(z+1-4i\right)-\left(2-2i\right)\right|\ge\left\|z+1-4i\right|-\left|2-2i\right\|=\left\|z+1-4i\right|-2\sqrt{2}\right|$

$$\Rightarrow\sqrt{10}\ge\left\|z+1-4i\right|-2\sqrt{2}\right|\Leftrightarrow\sqrt{10}\ge\left|z+1-4i\right|-2\sqrt{2}\ge\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{10}+2\sqrt{2}\ge\left|z+1-4i\right|\ge\sqrt{10}-2\sqrt{2}$$

Vậy $\left|z+1-4i\right|_{\max}=\sqrt{10}+2\sqrt{2};\quad \left|z+1-4i\right|_{\min}=\sqrt{10}-2\sqrt{2}$.

Bài toán 13

Trong các số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z+1\right|+\left|z+i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z=x+yi\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

$\left|z\right|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=8$

$P=\left|z+1\right|+\left|z+i\right|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpxki cho hai bộ số 1;1 và $\sqrt{(x+1)^2+y^2};\sqrt{x^2+(y+1)^2}$, ta có:

$P^2\le2\left[(x+1)^2+y^2+x^2+(y+1)^2\right]=4(9+x+y)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-cốpxki cho hai bộ số 1;1 và $x;y$, ta có:

$x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=4$

$\Rightarrow P^2\le52\Rightarrow P\le2\sqrt{13}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{13}$ khi $z=2+2i$.

Bài toán 14

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8$. Gọi M , m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $\left|z\right|$. Khi đó $M+m$ bằng ?

Giải:

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=\left|z-3\right|+\left|z+3\right|\ge\left|z-3+z+3\right|=\left|2z\right|\Leftrightarrow\left|z\right|\le 4$.

Do đó $M=max\left|z\right|=4$.

Mà $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8\Leftrightarrow\left|x-3+yi\right|+\left|x+3+yi\right|=8\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$8=1.\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+1.\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(x-3\right)^2+y^2+\left(x+3\right)^2+y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 8\le\sqrt{2\left(2x^2+2y^2+18\right)}\Leftrightarrow 2\left(2x^2+2y^2+18\right)\ge 64$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 7\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{7}\Leftrightarrow\left|z\right|\ge\sqrt{7}$.

Do đó $M=min\left|z\right|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Bài toán 15

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-4\right|+\left|z+4\right|=10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $\left|z\right|$ bằng?

Giải:

Cách 1: Giả sử $z=x+yi$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $10=\left|z-4\right|+\left|z+4\right|\ge\left|z-4+z+4\right|=\left|2z\right|\Rightarrow\left|z\right|\le 5$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $100=\left(\left|z-4\right|.1+\left|z-4\right|.1\right)^2\le\left[\left(\left|z-4\right|\right)^2+\left(\left|z+4\right|\right)^2\right].2$

$\Leftrightarrow\left(a+4\right)^2+b^2+\left(a-4\right)^2+b^2\ge 50\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)\ge 9\Rightarrow\left|z\right|\ge 3$.

Cách 2: Giả sử $z=x+yi$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Từ giả thiết, ta có $\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}=10$. $\quad(*)$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi $M\left(x;y\right)$ và $F_1\left(-4;0\right)$, $F_2\left(-4;0\right)$ thì $\left(*\right)$ có dạng $MF_1+MF_2=2.5$. Vậy tợp hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là một Elip có độ dài trục lớn $a=5$, tiêu cự $F_1F_2=8\Rightarrow c=4$. Suy ra độ dài trục bé $b=\sqrt{a^2-c^2}=3$.

Khi đó ta luôn có $b\le OM\le a$ hay $3\le\left|z\right|\le 5$.

Bài toán 16

Gọi T là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right| \geq 3$ và $\left|z-1\right| \leq 5$. Gọi $z_1, z_2 \in$ T lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Tìm số phức $z_1 + 2z_2$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức: $\left|\left|z_1\right| - \left|z_2\right|\right| \leq \left|z_1 - z_2\right| \leq \left|z_1 + z_2\right|$.

Ta có: $\begin{cases} 3 \leq \left|z-i\right| \leq \left|z\right| + \left|i\right| \\ \left|z\right| - 1 \leq \left|z-1\right| \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq \left|z\right| \\ \left|z\right| \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \overset{(1)}{\leq} \left|z\right| \overset{(2)}{\leq} 6$.

Dấu "=" thứ nhất xảy ra khi $\left|z-i\right| = 3$, kết hợp với $\left|z-1\right| \leq 5$ ta được hệ:

$$\begin{cases} \left|z_1 - 1\right| = 3 \\ \left|z_1 - 1\right| \leq 5 \Rightarrow z_1 = -2i. \\ \left|z_1\right| = 2 \end{cases}$$

Dấu "=" thứ hai xảy ra khi $\left|z-i\right| = 5$, kết hợp với $\left|z-1\right| \geq 3$ ta được hệ: $\begin{cases} \left|z_2 - 1\right| = 5 \\ \left|z_2 - 1\right| \geq 3 \Rightarrow z_2 = 6 \\ \left|z_2\right| = 6 \end{cases}$

Suy ta $z_1 + 2z_2 = 12 - 6i$.

II. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN MIN-MAX

1. PHƯƠNG PHÁP:

Để giải được lớp bài toán này, chúng tôi cung cấp cho học sinh các bất đẳng thức hình học và một số bài toán công cụ sau:

Bài toán công cụ 1

Cho đường tròn (T) cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn (T). Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

TH1: A thuộc đường tròn (T)

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

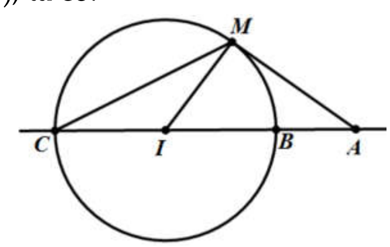
AM đạt giá trị lớn nhất bằng 2R khi M là điểm đối xứng với A qua I

TH2: A không thuộc đường tròn (T)

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A,I và đường tròn (T);

Giả sử $AB < AC$.

+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:



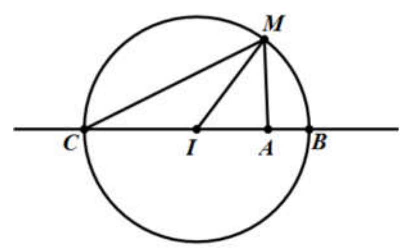
$AM \ge AI - IM = AI - IB = AB$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \le AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:



$AM \ge IM - IA = IB - IA = AB$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \le AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt gía trị nhỏ nhất.

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt gía trị lớn nhất.

Bài toán công cụ 2

Cho hai đường tròn (T_1) có tâm I, bán kính R_1; đường tròn (T_2) có tâm J, bán kính R_2. Tìm vị trí của điểm M trên (T_1), điểm N trên (T_2) sao cho MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua I, J; d cắt đường tròn (T_1) tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử JA > JB) ; d cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt C, D (giả sử ID > IC).

Với điểm M bất khì trên (T_1) và điểm N bất kì trên (T_2).

Ta có: $MN \le IM + IN \le IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD$

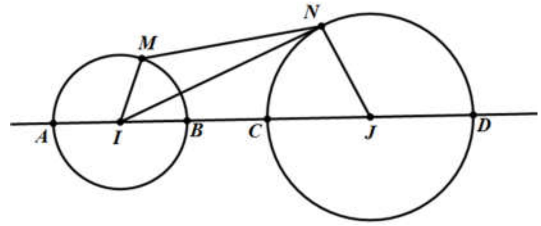
Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D

$MN \geq \left|IM - IN\right| \geq \left|IJ - IM - JN\right| = \left|IJ - R_1 + R_2\right| = BC$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C.

Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.

khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài toán công cụ 3

Cho hai đường tròn (T) có tâm I, bán kính R; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm vị trí của điểm M trên (T), điểm N trên Δ sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Giải:</u>

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d

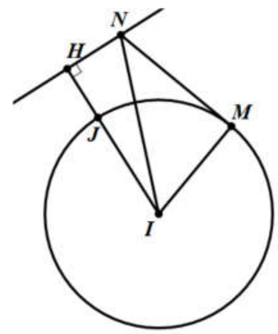
Đoạn IH cắt đường tròn (T) tại J

Với M thuộc đường thẳng Δ, N thuộc đường tròn (T), ta có:

$MN \geq IN - IM \geq IH - IJ = JH = const$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H; N \equiv I$

Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



2. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Trong các số phức z thoả mãn $\left|z - 3 + 4i\right| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$

<u>Giải:</u>

❖ **Cách 1**

Gọi $z = x + yi \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\left|z - 3 + 4i\right| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(3;-4)$, bán kính R = 4.

$\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM; OI = 5 > R$ nên O nằm ngoài đường tròn (T)

$\left|z\right|$ lớn nhất khi OM lớn nhất, nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

(Bài toán qui về Bài toán công cụ 1- Trường hợp 2)

Đường thẳng OI cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt

$A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right); B\left(\frac{27}{5}; -\frac{36}{5}\right) \Rightarrow OA = 1; OB = 9$

Với M di động trên (T), ta có: $OA \leq OM \leq OB \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9 \Rightarrow 1 \leq \left|z\right| \leq 9$

$\Rightarrow$ OM nhỏ nhất khi M trùng với A; OM lớn nhất khi M trùng với B

Vậy $\left|z\right|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$; $\left|z\right|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \dfrac{27}{5} - \dfrac{36}{5}i$.

❖ **Cách 2**

Gọi $z = x + yi \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\omega = 3 - 4i \Rightarrow A(3;-4)$ biểu diễn cho số phức ω

$\left|z\right| = OM; \ \left|\omega\right| = OA = 5 \quad \Rightarrow \left|z - \omega\right| = AM$;

Theo giả thiết $\left|z - 3 + 4i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|z - \omega\right| = 4 \Leftrightarrow AM = 4$.

Ta có: $\left|OM - OA\right| \le AM \Leftrightarrow -4 \le OM - OA \le 4 \Leftrightarrow -4 + OA \le OM \le 4 + OA \Leftrightarrow 1 \le OM \le 9$

$\Rightarrow 1 \le \left|z\right| \le 9; \left|z\right| = 1$ khi $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i; \left|z\right| = 9$ khi $z = \dfrac{27}{5} - \dfrac{36}{5}i$.

Vậy $\left|z\right|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$; $\left|z\right|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \dfrac{27}{5} - \dfrac{36}{5}i$.

Nhận xét: Ngoài ra bài toán trên có thể giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhia-Cốpxki hoặc phương pháp lượng giác hoá.

Bài toán 2

Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\overline{z}(z + 2 - 4i)$ là một số ảo, tìm số phức z sao cho $\omega = z - 1 - i$ có môđun lớn nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\overline{z}(z + 2 - 4i) = (x - yi)\left[(x + 2) + (y - 4)i\right] = x(x + 2) + y(y - 4) + \left[x(y + 4) - y(x + 2)\right]i$

$\overline{z}(z + 2 - 4i)$ là một số ảo

$\Leftrightarrow x(x + 2) + y(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

$\Rightarrow$ M biểu diễn cho z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

$\left|\omega\right| = \left|z - 1 - i\right| = \left|(x - 1) + (y - 1)i\right| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = AM$ với $A(1;1)$

$IA = \sqrt{5} \Rightarrow A \in (T)$ ***(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 1 - trường hợp 1)***

Vì M là điểm di động trên (T) nên AM lớn nhất

$\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (T)

$\Leftrightarrow M$ đối xứng với A qua I

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm của $AM \Rightarrow M(-3;3) \Rightarrow z = -3 + 3i \Rightarrow \omega = -4 + 2i$

Vậy $\left|\omega\right|$ lớn nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $z = -3 + 3i$.

Bài toán 3

Trong các số phức z_1, z_2 thoả mãn: $\left|z_1 - 1 - i\right| = 1$; $\left|z_2 - 6 - 6i\right| = 6$, tìm số phức z_1, z_2 sao cho $\left|z_1 - z_2\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z_1 = a + b.i$; $z_2 = c + d.i$; $(a, b, c, d$ là những số thực); z_1 được biểu diễn bởi điểm $M\left(a;b\right)$; z_2 được biểu diễn bởi điểm $N\left(c;d\right)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy

$\left|z_1 - 1 - i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z_1 - 1 - i\right|^2 = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1.

$\left|z_2 - 6 - 6i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|z_2 - 6 - 6i\right|^2 = 36 \Leftrightarrow (c-6)^2 + (d-6)^2 = 36$

$\Rightarrow$M thuộc đường tròn tâm $J\left(6;6\right)$, bán kính $R' = 6$.

$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} = MN$.

(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 2)

Đường thẳng IJ có phương trình $y = x$. Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm I tại hai điểm

$$M_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right);M_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm J tại 2 điểm $N_1\left(6-3\sqrt{2};6-3\sqrt{2}\right);N_2\left(6+3\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

$M_2N_1 \le MN \le M_1N_2 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} - 7 \le \left|z_1 - z_2\right| \le 5\sqrt{2} + 7$

$\max\left|z_1 - z_2\right| = 5\sqrt{2} + 7$ *khi* $M \equiv M_1, N \equiv N_2$.

Vậy $z_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = 6 + 3\sqrt{2} + \left(6+3\sqrt{2}\right)i$ thì $\left|z_1 - z_2\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 4

Cho các số phức $z_1; z_2$ thoả mãn: $\left|z_1\right| = 1$; $\overline{z}_2\left[z_2 - (1-i)\right] - 6 + 2i$ là một số thực. Tìm số phức $z_1; z_2$ sao cho $P = \left|z_2\right|^2 - \left(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$; $\left(a, b, c, d \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow M(a;b), N(c;d)$ lần lượt biểu diễn cho $z_1; z_2$ trong hệ toạ độ Oxy

$\left|z_1\right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính R = 1

$\overline{z}_2 = c - di$;

$$\begin{aligned}\omega &= \overline{z}\left[z - \left(1-i\right)\right] - 6 + 2i = \left(c - di\right)\left[(c-1) + (d+1)i\right] + 2 - 6i \\ &= c(c-1) + d(d+1) + 2 + \left[c(d+1) - d(c-1) - 6\right]i\end{aligned}$$

ω là số thực $\Leftrightarrow c(d+1) - d(c-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow c + d - 6 = 0$

$\Rightarrow$ N thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-6=0$

Ta có $d(O;\Delta)>1$ nên Δ và (T) không có điểm chung

$z_1\overline{z}_2 = ac+bd+(bc-ad)i;$

$\overline{z}_1 z_2 = ac+bd+(-bc+ad)i \Rightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2 = 2(ac+bd)$

$P = c^2+d^2-2(ac+bd) = (c-a)^2+(b-d)^2-1 = MN^2-1$ (vì $a^2+b^2=1$)

(Bài toán được qui về Bài toán công cụ 3)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $\Delta: x+y-6=0 \Rightarrow H(3;3)$

Đoạn OH cắt đường tròn (T) tại $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với N thuộc đường thẳng Δ, M thuộc đường tròn (T), ta có:

$MN \geq ON-OM \geq OH-OI = IH = 3\sqrt{2}-1$.

Đẳng thức xảy ra khi $M\equiv I; N\equiv H$

$\Rightarrow P \geq \left(3\sqrt{2}-1\right)^2-1 = 18-6\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3+3i$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $18-3\sqrt{2}$ khi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3+3i$.

Bài toán 5

Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P = \left|z-1\right|+\left|z-1+7i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z = x+yi$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

$\left|z\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$

$P = \left|z-1\right|+\left|z-1+7i\right| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+7)^2}$

Xét $\vec{u}\left(x-1;y\right), \vec{v}\left(1-x;-7-y\right) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = \left(0;-7\right)$. Khi đó:

$P = \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 7$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

$\Rightarrow (x-1)(-7-y) = y(1-x) \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Với $x=1; y=\sqrt{3}$ thì $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng (không thoả mãn)

Với $x=1; y=-\sqrt{3}$ thì $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng (thoả mãn)

Vậy $z = 1-i\sqrt{3}$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7.

Bài toán 6

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-(3+4i)\right|=\sqrt{5}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2$. Tính giá trị $A=M^2+m^2$.

Giải :

Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có : $\left|z-(3+4i)\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=5$.

$\Rightarrow z$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Mặt khác : $P=\left|z+2\right|^2-\left|z-i\right|^2=(a+2)^2+b^2-a^2-(b-1)^2\Rightarrow 4a+2b+3-P=0$.

Vậy z thuộc đường thẳng $(\Delta): 4a+2b+3-P=0$.

Ta có : $\begin{cases} z\in(C)\\ z\in(\Delta)\end{cases}\Rightarrow$ Để $\exists z$ thì $(C)\cap(\Delta)\neq\varnothing\Rightarrow d\left[I;(\Delta)\right]\le R$.

$\Rightarrow \dfrac{\left|23-P\right|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow 13\le P\le 33\Rightarrow A=1258$.

Bài toán 7

Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

Giải:

Gọi $z=x+yi\quad (x;y\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$ (với $F_1(-3;0);\quad F_2(3;0)$).

$\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$

$\Leftrightarrow M\in(E)$ có tâm O, trục lớn bằng 10; tiêu cự bằng 6 $\Leftrightarrow M\in(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$\left|z\right|=OM;OM$ lớn nhất $\Leftrightarrow OM=a=5\Leftrightarrow M(5;0)\vee M(-5;0)$

Vậy $\left|z\right|$ lớn nhất bằng 5 khi $z=5\vee z=-5$.

Bài toán 8

Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$.

Giải:

Đặt $z=x+yi\quad (x,y\in\mathbb{R})$ ta có

$u=\left[(x+3)+(y-1)i\right]\left[(x+1)-(y-3)i\right]=x^2+y^2+4x-4y+6+2(x--y-4)i$

Ta có: $u\in R\Leftrightarrow x-y-4=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $d: x-y-4=0$.

$M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z, z có môđun nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM \perp d$. Tìm được $M\left(-2;2\right)$ suy ra $z=-2+2i$.

Bài toán 9

Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}\left(1+i\right)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Giải:

Gọi $z=x+yi \quad (x,y\in R) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

$\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2-x-5y+\dfrac{39}{8}=0$.

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

$\Rightarrow M\in(C)$ là đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{26}}{4}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua O và I $\Rightarrow d: y=5x$.

Gọi M_1, M_2 là hai giao điểm của d và (C) $\Rightarrow M_1\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{4}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

Ta thấy $\begin{cases} OM_1 > OM_2 \\ OM_1 = OI + R \geq OM (M\in(C)) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Số phức cần tìm ứng với điểm biểu diễn M_1 hay $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4}i$.

Bài toán 10

Cho số phức $z=a+bi \ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+1+i\right|=\left|z+2i\right|$ và $P=\left|z-2-3i\right|+\left|z+1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+2b$.

Giải :

Ta có : $\left|z+1+i\right|=\left|z+2i\right| \Leftrightarrow a-b=1$.

$P=\left|z-2-3i\right|+\left|z+1\right|=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-3\right)^2}+\sqrt{\left(a+1\right)^2+b^2}$.

Xét trong mặt phẳng phức Oab, xét các điểm $M\left(a;b\right)$, $A\left(2;3\right)$, $B\left(-1;0\right)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M\in\left(d\right): a-b-1=0$.

Ta có : $MA+MB=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-3\right)^2}+\sqrt{\left(a+1\right)^2+b^2}$.

Vậy ta tìm $M\in d$ sao cho $\left(MA+MB\right)_{\min}$.

Do $\left(x_A-y_A-1\right)\left(x_B-y_B-1\right)>0 \Rightarrow A,B$ cùng thuộc một phía so với đường thẳng d.

$\Rightarrow$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d. Ta có : $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

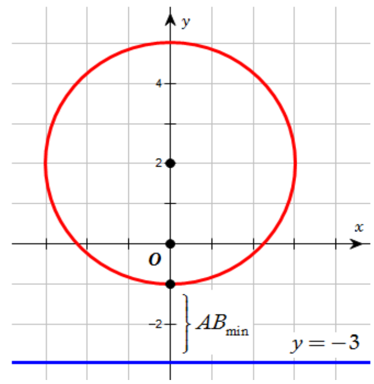
Dấu "=" xảy ra khi $M=A'B\cap d \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow P=a+2b=\dfrac{5}{2}$.

Bài toán 11

Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $|z_1-2i|=3$ và $|z_2+2+2i|=|z_2+2+4i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|$ bằng?

Giải:

Đặt $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$ với $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbb{R}$.



- $|z_1-2i|=3\Leftrightarrow x_1^2+(y_1-2)^2=9\Rightarrow$ tập hợp các số phức z_1 là đường tròn $(C):x^2+(y-2)^2=9$.

- $|z_2+2+2i|=|z_2+2+4i|$

$\Leftrightarrow (x_2+2)^2+(y_2+2)^2=(x_2+2)^2+(y_2+4)^2\Leftrightarrow y_2+3=0$

$\Rightarrow$ tập hợp các số phức z_2 là đường thẳng $d:y=-3$.

Ta có $P=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ đây chính là khoảng cách từ điểm $B(x_2;y_2)\in d$ đến điểm $A(x_1;y_1)\in(C)$. Do đó $|z_2-z_1|_{\min}\Leftrightarrow AB_{\min}$. Dựa vào hình vẽ ta tìm được $AB_{\min}=2$ khi $A(0;-1),\ B(0;-3)$. Vậy $P=|z_1-z_2|$ khi $z_1=-i;\ z_2=-3i$.

<u>Nhận xét:</u> Ở bài này đường thẳng và đường tròn có vị trí đặc biệt nên vẽ hình sẽ nhận ra ngay được hai điểm A & B, nếu không thì viết phương trình đường thẳng qua tâm C và vuông góc với d, sau đó tìm giao điểm với C và d rồi loại điểm.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI

Bài toán 1

Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z-1\right|+\left|z-1+7i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

$A.1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad B.1+i\sqrt{3}$ $\quad C.\sqrt{3}+i$ $\quad D.-\sqrt{3}+i$

Hướng dẫn:

- Chuyển qua chế độ số phức: MODE 2
- Nhập biểu thức P :

SHIFT hyp ALPHA) − 1 ▶ + SHIFT hyp ALPHA) − 1 + 7 ENG

Màn hình hiển thị:

```
CMPLX            Math
|X-1|+|X-1+7i|
```

- Gán X cho từng đáp án, dùng phím: CALC

```
CMPLX            Math ▲
X?
                     1
       -1.732050808i
```

- So sánh kết quả và ta tìm được giá trị lớn nhất là 7

```
CMPLX            Math ▲
|X-1|+|X-1+7i|
                     7
```

Bài toán 2

Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

$A.4+\dfrac{9}{5}i$ $\quad B.5$ $\quad C.3+\dfrac{12}{5}i$ $\quad D.3+5\mathrm{i}$

Hướng dẫn:

- Chuyển qua chế độ số phức: MODE 2
- Nhập biểu thức: $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|-10$ vào máy tính:

SHIFT hyp ALPHA) − 3 ▶ SHIFT hyp ALPHA) + 3 ▶ − 1 0.

Màn hình hiển thị:

```
CMPLX            Math ▲
|X-3|+|X+3|-10
```

- Dùng phím CALC để nhập các đáp án, nếu đáp án nào cho kết quả bằng 0 thì thỏa mãn điều kiện $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10$.

Ta thấy 3 đáp án A,B,C thỏa mãn điều kiện đề bài nhưng đáp án B có môđun lớn nhất. Chọn B.

```
CMPLX            Math ▲
|X-3|+|X+3|-10
                     0
```

V. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+2-2i\right|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$ lần lượt là

A. $2\sqrt{2}+1;2\sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{2}+1;\sqrt{2}-1$ **C.** $2;1$ **D.** $\sqrt{3}+1;\sqrt{3}-1$

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+1+2i\right|=4\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$ lần lượt là

A. $\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{3}$

Câu 3. Trong các số phức z thỏa mãn: $\left|z-3+4i\right|=\left|z\right|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

A. $z=\frac{11}{2}+i$ **B.** $z=\frac{3}{2}-2i$ **C.** $z=-5-\frac{5}{2}i$ **D.** $z=-3+\frac{1}{6}i$

Câu 4. Trong các số phức z thỏa mãn: $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

A. $z=-2+2i$ **B.** $z=-2-2i$ **C.** $z=2-2i$ **D.** $z=2+2i$

Câu 5. Trong các số phức z thỏa: $\left|\overline{z}-3+4i\right|=\left|z\right|$, biết rằng số phức $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P=a^2-b$ là

A. $P=\frac{1}{4}$ **B.** $P=\frac{1}{2}$ **C.** $P=-\frac{1}{4}$ **D.** $P=-\frac{1}{2}$

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn: $\left|z+1-5i\right|=\left|\overline{z}+3-i\right|$, biết rằng số phức $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

A. 3 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $P=-\sqrt{2}$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-i\right|=1$. Giá trị lớn nhất của $\left|z-1\right|$ là

A. $\sqrt{2}+1$ **B.** $\sqrt{2}-1$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\left(2+i\right)z+1\right|=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z-1\right|$ bằng

A. 3 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}-1+2i\right|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $\left|z+1-4i\right|$ bằng

A. $\sqrt{10}$ **B.** $10\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{10}$ **D.** $4\sqrt{10}$

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1-2i\right|=4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z+2+i\right|$. Giá trị của $T=M^2+m^2$ là

A. $T=50$ **B.** $T=64$ **C.** $T=68$ **D.** $T=16$

Câu 11. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z\right|^2+z+\overline{z}=0$ là đường tròn $\left(C\right)$. Diện tích S của đường tròn $\left(C\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $S = 4\pi$ **B.** $S = 2\pi$ **C.** $S = 3\pi$ **D.** $S = \pi$

Câu 12. Trong mặt phẳng phức *Oxy*, tập hợp biểu diễn số phức *Z* thỏa $1 \le |z+1-i| \le 2$ là hình vành khăn. Chu vi *P* của hình vành khăn là bao nhiêu?

A. $P = 4\pi$ **B.** $P = \pi$ **C.** $P = 2\pi$ **D.** $P = 3\pi$

Câu 13. Trong mặt phẳng phức *Oxy*, giả sử *M* là điểm biểu diễn số phức *Z* thỏa mãn $|z+2| + |z-2| = 8$. Tập hợp những điểm *M* là?

A. $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ **B.** $(E): \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

C. $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 64$ **D.** $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Câu 14. Trong mặt phẳng phức *Oxy*, các số phức z thỏa $|z-5i| \le 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phẳng ảo bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 15. Trong mặt phẳng phức *Oxy*, các số phức z thỏa $|z+2i-1| = |z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm *M* sao cho *MA* ngắn nhất với $A(1;3)$

A. $3+i$ **B.** $1+3i$ **C.** $2-3i$ **D.** $-2+3i$

Câu 16. Trong mặt phẳng phức *Oxy*, trong các số phức z thỏa $|z+1-i| \le 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{-\sqrt{2}-2}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ **C.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

Câu 17. Cho số phức *z* thỏa mãn : $|z-1+i| = \sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+2|$. Khi đó $A^2 + B^2$ có giá trị bằng

A. 20 **B.** 18 **C.** 24 **D.** 32

Câu 18. Cho số phức *z* thỏa mãn : $|z+1-2i| = 2\sqrt{5}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+i|$. Khi đó $A.B$ có giá trị bằng **C.**

A. 10 **B.** -10 **C.** 12 **D.** -12

Câu 19. Cho số phức *z* thỏa mãn : $|z(1+i)-1+2i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+1+3i|$. Khi đó $2A^2 - B^2$ có giá gần nhất bằng

A. 20 **B.** 18 **C.** 64 **D.** 32

Câu 20: Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+i+1|$.

A. $1+\sqrt{13}$. **B.** $2+\sqrt{13}$. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 21: Xét số phức z thỏa mãn $|z+i+1| = |\overline{z}-4i+2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2i+1|$.

A. $\dfrac{98}{5}$. **B.** $\dfrac{102}{5}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{470}}{5}$.

Câu 22: Cho số phức z thoã mãn $|z-3+4i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị của biểu thức $P = A^2 - 2B$.

A. $P=43$ **B.** $P=80$ **C.** $P=8$ **D.** $P=48$

Câu 23: Cho số phức z thoã mãn $\left|z-1-i\right|=\sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $\left|z-2+i\right|$. Giá trị của biểu thức $P=2A+B^2$ gần bằng.

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Câu 24: Cho số phức z thoã mãn $\left|\frac{1+i}{1-i}z-1+i\right|=2$. Giá trị lớn nhất của $A=\left|z-2+i\right|$ là.

A. $2+\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{5}-2$ **C.** $2+\sqrt{5}$ **D.** 5

Câu 25: Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$ hãy tìm số phức z có mođun nhỏ nhất .

A. $|z|_{\min}=1$ **B.** $|z|_{\min}=2-\sqrt{2}$ **C.** $|z|_{\min}=0$ **D.** $|z|_{\min}=2$

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$ Giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$ là

A. $\sqrt{13}+2.$ **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1.$

Câu 27: Cho số phức z thoã mãn điều kiện $\left|z+2i\right|=\left|z-1-2i\right|$. Gọi w là số phức thoã mãn điều kiện $w=\left(1+i\right)z+2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|w\right|$ là:

A. $P_{\min}=\frac{1}{5}$ **B.** $P_{\min}=\frac{5}{\sqrt{34}}$ **C.** $P_{\min}=\frac{5}{\sqrt{41}}$ **D.** $P_{\min}=\frac{1}{3}$

Câu 28: Cho số phức $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn điều kiện $\left|z+1-i\right|+\left|z+2-3i\right|=\sqrt{5}$. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x.\left|z\right|^2$. Tổng $M+2m$ bằng

A. $-54.$ **B.** 27. **C.** 18. **D.** $-9.$

Câu 29: Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2-4z+9=0$. Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2 trên mặt phẳng phứ**C.** Khi đó độ dài MN là

A. $MN=4.$ **B.** $MN=5.$ **C.** $MN=2\sqrt{5}.$ **D.** $MN=\sqrt{5}.$

Câu 30 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn điều kiện $w=(1-2i)z+3$, biết z là số phức z thỏa mãn $|z+2|=5$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2=125.$ **B.** $(x-5)^2+(y-4)^2=125.$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2=125.$ **D.** $x=2.$

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1A	2B	3B	4D	5A	6B	7A	8B	9C	10C	11D	12C	13A	14C	15A
16A	17C	18A	19C	20A	21C	22A	23C	24D	25A	26D	27B	28A	29C	30A

Câu 1. Ta có $\left|z+2-2i\right|+\left|-z\right|\ge\left|z+2-2i-z\right|=2\sqrt{2}\Rightarrow\left|z\right|\ge2\sqrt{2}-1.$

Lại có $\left|z+2-2i\right|+\left|2i-2\right|\ge\left|z+2-2i+2i-2\right|=\left|z\right|\Rightarrow\left|z\right|\le1+2\sqrt{2}.$ **Chọn A.**

Câu 2. Ta có $4\sqrt{5}=\left|z+1+2i\right|\le\left|z\right|+\left|1+2i\right|=\left|z\right|+\sqrt{5}\Rightarrow\left|z\right|\ge3\sqrt{5}.$ **Chọn B.**

Câu 3. Ta có

$$\left|a+bi-3+4i\right|=\left|a+bi\right|\Rightarrow\left(a-3\right)^2+\left(b+4\right)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow25-6a+8b=0\Leftrightarrow a=\frac{8b+25}{6}$$

$$\Rightarrow\left|z\right|^2=\left(\frac{8b+25}{6}\right)^2+b^2=\frac{25}{9}b^2+\frac{100}{9}b+\frac{625}{36}=\left(\frac{5}{3}b+\frac{10}{3}\right)^2+\frac{25}{4}\ge\frac{25}{4}\Rightarrow b=-2\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$$

Chọn B.

Câu 4. Ta có $\left|a+bi-2-4i\right|=\left|a+bi-2i\right|\Rightarrow\left(a-2\right)^2+\left(b-4\right)^2=a^2+\left(b-2\right)^2$

$\Leftrightarrow20-4a-8b=4-4b\Leftrightarrow4a+4b=16\Leftrightarrow b=4-a$

$\Rightarrow\left|z\right|^2=a^2+\left(4-a\right)^2=2a^2-8a+16=2\left(a-2\right)^2+8\Rightarrow a=2\Rightarrow b=2.$ **Chọn D.**

Câu 5. Ta có

$$\left|a-bi-3+4i\right|=\left|a+bi\right|\Rightarrow\left(a-3\right)^2+\left(b-4\right)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow25-6a-8b=0\Leftrightarrow b=\frac{25-6a}{8}$$

$$\Rightarrow\left|z\right|^2=a^2+\left(\frac{25-6a}{8}\right)^2=\frac{25}{16}a^2-\frac{75}{16}a+\frac{625}{64}=\left(\frac{5}{4}a-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{25}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow b=2.$$ **Chọn A.**

Câu 6. Ta có $\left|a+bi+1-5i\right|=\left|a-bi+3-i\right|\Rightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b-5\right)^2=\left(a+3\right)^2+\left(b+1\right)^2$

$\Leftrightarrow26+2a-10b=10+6a+2b\Leftrightarrow4a+12b=16\Leftrightarrow a=4-3b$

$$\Rightarrow\left|z\right|^2=\left(4-3b\right)^2+b^2=10b^2-24b+16=\left(b\sqrt{10}-\frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2+\frac{8}{5}\Rightarrow b=\frac{6}{5}\Rightarrow a=\frac{2}{5}.$$ **Chọn B.**

Câu 7. Đặt $w=z-1\Leftrightarrow z=w+1$, khi đó

$\left|z-2-i\right|=\left|w-1-i\right|=1\Rightarrow\left|w\right|_{\max}=\sqrt{1^2+1^2}+1=1+\sqrt{2}.$ **Chọn A.**

Câu 8. Ta có $\left|\left(2+i\right)z+1\right|=1\Leftrightarrow\dfrac{\left|\left(2+i\right)z+1\right|}{\left|2+i\right|}=\dfrac{1}{\left|2+i\right|}\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{1}{2+i}\right|=\left|z+\dfrac{2}{5}-\dfrac{i}{5}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Đặt $w=z-1\Leftrightarrow z=w+1$, khi đó

$$\left|z+\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right|=\left|w+\frac{7}{5}-\frac{i}{5}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\left|w\right|_{\max}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Và $\left|w\right|_{\max}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vậy $\left|w\right|_{\min}+\left|w\right|_{\max}=2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 9. Ta có $\left|\overline{z}-1+2i\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left|\overline{z}-1+2i\right|^2=10\Leftrightarrow\left(\overline{z}-1+2i\right).\overline{\overline{z}-1+2i}=10$.

$\Leftrightarrow\left(\overline{z}-1+2i\right).\left(z-1+2i\right)=10\Leftrightarrow\left|\overline{z}-1+2i\right|.\left|z-1+2i\right|=10\Rightarrow\left|z-1+2i\right|=\sqrt{10}$..

Đặt $w=z+1-4i\Leftrightarrow z=w-1+4i$, khi đó $\left|z-1+2i\right|=\left|w-2+6i\right|=\sqrt{10}$.

Vậy giá trị lớn nhất là $\left|w\right|_{\max}=\sqrt{10}+\sqrt{2^2+6^2}=3\sqrt{10}\Rightarrow\left|z+1-4i\right|_{\max}=3\sqrt{10}$. **Chọn C.**

Câu 10. Đặt $w=z+2+i\Leftrightarrow z=w-2-i$, khi đó

$\left|z-1-2i\right|=\left|w-2-i-1-2i\right|=\left|w-3-3i\right|=4$.

Suy ra $\begin{cases}M=\left|w\right|_{\max}=\sqrt{3^2+3^2}+4=3\sqrt{2}+4\\ m=\left|w\right|_{\min}=\sqrt{3^2+3^2}-4=3\sqrt{2}-4\end{cases}\to M^2+m^2=68$. **Chọn C.**

Câu 11. Đặt $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, ta có $\overline{z}=x-yi$ và $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Khi đó, giả thiết $\left|z\right|^2+z+\overline{z}=0\Leftrightarrow x^2+y^2+x+yi+x-yi=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-1;0\right)$, bán kính $R=1\Rightarrow S_{(C)}=\pi$.

Chọn D.

Câu 12. Đặt $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, khi đó ta có

$\left|z+1-i\right|=\left|x+1+\left(y-1\right)i\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}\ge1\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2\ge1\to$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên ngoài hình tròn có tâm $I_1\left(-1;1\right)$, bán kính $R_1=1$.

$\left|z+1-i\right|=\left|x+1+\left(y-1\right)i\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}\le2\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2\le4\to$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên trong hình tròn có tâm $I_2\left(-1;1\right)$, bán kính $R_2=2$.

Vì hai đường tròn đồng tâm nên chu vi P hình vành khăn là $P=C_2-C_2=2\pi\left(R_2-R_1\right)=2\pi$.

Chọn C.

Câu 13. Xét điểm $F_1\left(2;0\right)$ và $F_2\left(-2;0\right)$, ta có $MF_1+MF_2=8=2a\Rightarrow a=4$

$F_1F_2=4=2c\Rightarrow c=2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=12\Rightarrow$ Tập hợp điểm là Elip $\left(E\right):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **Chọn A.**

Câu 14. Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z. Xét điểm $A\left(0;5\right)\Rightarrow AM\le3$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn tâm A bán kính $R=3$

$\Rightarrow OM\ge AO-AM=5-3=2$. **Chọn C.**

Câu 15. Xét điểm $B\left(1;-2\right),C\left(0;-1\right)\Rightarrow MB=MC\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường thẳng trung được của BC.

Ta có: $(BC): x+y+1=0$ và trung điểm BC là $H\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ Phương trình đường trung trực BC là:

$\Delta: x-y-2=0$. Lại có: $AM \le d(A,\Delta) = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng khi M là hình chiếu của A lên Δ

Khi đó: $AM = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_M-1)^2 + (y_M-3)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_M-1)^2 + (x_M-5)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (x_M-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 \Rightarrow M(3;1)$. **Chọn A.**

Câu 16. Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z. Xét điểm $A(-1;1) \Rightarrow AM \le 1$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm A bán kính $R=1$

$\Rightarrow OM \le AO + AM = \sqrt{2}+1$. Dấu bằng khi M là giao điểm của (C) và $OA: y=-x$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = -y_M \\ (x_M+1)^2 + (y_M-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ (chọn điểm xa O hơn).

Chọn A.

Câu 17. Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z. Xét điểm $F(-2;0)$ và $E(1;-1) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R=\sqrt{2}$

Ta có: $|FE-EM| \le MF \le FE+EM \Leftrightarrow \sqrt{10}-\sqrt{2} \le MF \le \sqrt{10}+\sqrt{2} \Rightarrow A^2+B^2 = 24$. **Chọn C.**

Câu 18. Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z. Xét điểm $F(0;-1)$ và $E(-1;2) \Rightarrow EM = 2\sqrt{5}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Ta có: $|FE-EM| \le MF \le FE+EM \Leftrightarrow 2\sqrt{5}-\sqrt{10} \le MF \le 2\sqrt{5}+\sqrt{10} \Rightarrow AB = 10$. **Chọn A.**

Câu 19. Ta có $|z(1+i)-1+2i| = 2 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1-2i}{1+i}\right| = \left|z - \left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)\right| = \sqrt{2}$

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z. Xét điểm $F(-1;-3)$ và $E\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R=\sqrt{2}$

Ta có: $|FE-EM| \le MF \le FE+EM \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2}-\sqrt{2} \le MF \le \frac{3\sqrt{10}}{2}+\sqrt{2} \Rightarrow 2A^2 - B^2 \approx 64$.

Chọn C.

Câu 20: Giả sử $|a+bi-2-3i| = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2+\sin x \\ b = 3+\cos x \end{cases}$

Ta có $|\overline{z}+i+1|^2 = |a-bi+i+1|^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2 = (3+\sin x)^2 + (2+\cos x)^2$

$= 14 + 2(3\sin x + 2\cos x) \le 14 + 2\sqrt{(3^2+2^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 14 + 2\sqrt{13} \Rightarrow |\overline{z}+i+1| \le 1+\sqrt{13}$.

Chọn A

Câu 21: Ta có $\left|a+bi+i+1\right|=\left|a-bi-4i+2\right|\Rightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=\left(a+2\right)^2+\left(b+4\right)^2$

$\Leftrightarrow 2+2a+2b=20+4a+8b\Leftrightarrow 2a+6b+18=0\Leftrightarrow a=-3b-9.$

Khi đó $\left|z-2i+1\right|^2=\left|a+bi-2i+1\right|^2=\left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2=\left(-3b-8\right)^2+\left(b-2\right)^2$

$=10b^2+44b+68=\left(b\sqrt{10}+\dfrac{22}{\sqrt{10}}\right)^2+\dfrac{98}{5}\geq\dfrac{98}{5}\Rightarrow\left|z-2i+1\right|\geq\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$. **Chọn C**

Câu 22: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(3;-4\right)$ bán kính $R=2$

Khi đó $A=\left|z\right|_{\max}=OI+R=5+2=7$; $B=\left|z\right|_{\min}=\left|OI-R\right|=3$

Suy ra $P=43$. **Chọn A.**

Câu 23: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

Gọi $K\left(2;-1\right)$ khi đó $A=\left|z-2+i\right|_{\max}=IK+R=\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $B=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Do đó $P=2A+B^2\simeq 8$. **Chọn C.**

Câu 24: Ta có: $\left|\dfrac{1+i}{1-i}z-1+i\right|=2\Leftrightarrow\left|iz-1+i\right|=2\Leftrightarrow\left|i\right|.\left|z+1+i\right|=2\Leftrightarrow\left|z+1+i\right|=2$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-1;-1\right)$ bán kính $R=2$

Gọi $K\left(2;-1\right)$ suy ra $A_{\max}=IK+R=5$. **Chọn D.**

Câu 25: $\left|\dfrac{\left(1+i\right)z}{1-i}+2\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|\left|z+\dfrac{2\left(1-i\right)}{1+i}\right|=1\Leftrightarrow\left|z-2i\right|=1$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;2\right)$ bán kính $R=1$

Ta có: $\left|z\right|_{\min}=\left|OI-R\right|=1$. **Chọn A.**

Câu 26: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(2;3\right)$ bán kính $R=1$.

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\left|\overline{z}+1+i\right|=\left|x+1-yi+i\right|=\left|\left(x+1\right)-\left(y-1\right)i\right|$. Gọi $K\left(-1;1\right)$

Do đó $\left|\overline{z}+1+i\right|_{\max}=IK+R=1+\sqrt{13}$. **Chọn D.**

Câu 27: Ta có: $\left|z+2i\right|=\left|z-1-2i\right|\Leftrightarrow\left|\left(1+i\right)z-2+2i\right|=\left|\left(1+i\right)z+1-3i\right|$

$\Leftrightarrow\left|w-4+2i\right|=\left|w-1-3i\right|$. Gọi $A\left(4;-2\right);B\left(1;3\right)$ và $M\left(w\right)$ suy ra $MA=MB$ nên tập hợp điểm M là trung trực của AB có PT là: $3x-5y-5=0\left(d\right)$

Ta có: $\left|w\right|=OM\Rightarrow OM_{\min}=d\left(O;d\right)=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **Chọn B.**

Câu 28: Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow M_{(z)}=\left(x;y\right)$ và $A\left(-1;1\right)$, $B\left(-2;3\right)$ suy ra $AB=\sqrt{5}$.

Từ giả thiết ta có

$\left|z+1-i\right|+\left|z+2-3i\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}+\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-3\right)^2}=MA+MB=AB.$

$\Rightarrow M$ thuộc đường thẳng $\left(AB\right):2x+y+1=0\Rightarrow y=-2x-1$ với $x\in\left[-2;-1\right]$.

Khi đó $P = x.\left|z\right|^2 = x.\left[x^2 + \left(2x+1\right)^2\right] = 5x^3 + 4x^2 + x$. Đặt $f\left(x\right) = 5x^3 + 4x^2 + x$.

Xét hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;-1\right]$, có $f'\left(x\right) = 15x^2 + 8x + 1 > 0;\ \forall x \in \left[-2;-1\right]$.

Suy ra $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left[-2;-1\right] \Rightarrow \begin{cases} M = f\left(-1\right) = -2 \\ m = f\left(-2\right) = -26 \end{cases} \Rightarrow M + 2m = -54$. **Chọn A**

Câu 29 : Ta có $z^2 - 4z + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 2 - i\sqrt{5} \\ z_2 = 2 + i\sqrt{5} \end{array}\right.$. Suy ra $M\left(2;-\sqrt{5}\right), N\left(2;\sqrt{5}\right)$ $MN = 2\sqrt{5}$.

Chọn C

Câu 30 : Gọi $M\left(x;y\right)$ với $x,y \in \mathbb{R}$ thì M là điểm biểu diễn cho số phức $w = x + yi$

Ta có $w = \left(1-2i\right)z + 3 \Rightarrow z = \dfrac{x-3+yi}{1-2i} = \dfrac{\left[\left(x-3\right)+yi\right]\left(1+2i\right)}{5} = \dfrac{x-2y-3}{5} + \dfrac{2x+y-6}{5}i$

Theo giả thuyết

$\left|z+2\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-2y+7}{5} + \dfrac{2x+y-6}{5}i\right| = 5 \Leftrightarrow \left(x-2y+7\right)^2 + \left(2x+y-6\right)^2 = 625$

Suy ra $\left(x-1\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 125$. **Chọn A.**

E. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

I. LÝ THUYẾT

1. Acgumen của số phức

Gọi M là một điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu là Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.

Như vậy nếu φ là một acgumen của z, thì mọi acgumen đều có dạng: $\varphi+2k\pi, k\in Z$.

2. Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$ $(a,b \in \mathbb{R})$.

Dạng lượng giác có dạng: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r > 0$.

Để chuyển một số phức sang dạng lượng giác ta cần tìm r và φ;

- Ta có : $r = |z|$
- φ là số thực thoả mãn : $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$.

3. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0, r' \geq 0)$ thì:

$$z.z' = r.r[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)+i\sin\left(\varphi-\varphi'\right)\right];\left(khi\, r>0\right)$$

4. Công thức Moivre

$$[z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

5. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r>0)$

Khi đó z có hai căn bậc hai là: $\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ và

$$-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)$$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1

Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a. $z_1 = 6 + 6i$ b. $z_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ c. $z_3 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

Giải:

a) Ta có: $r_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = 6\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$.

b) Ta có $r_2 = \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 12(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$.

c)Ta có: $r_3 = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 5$.

Chọn φ là số thực thoả mãn $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_3 = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Bài toán 2

Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

a) $(1-i)(1+i)$ b) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ c) $\frac{1}{2+2i}$

Giải:

a) Ta có: $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; $(1+i) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right]$

Áp dụng công tthức nhân, chia số phức ta được:

$(1 - i\sqrt{3})(1+i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

b) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

c) $\dfrac{1}{2+2i}=\dfrac{1}{4}(1-i)=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\text{isin}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\text{isin}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

Bài toán 3

Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

a) $\dfrac{(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{9}}$ b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^{5}(1+\sqrt{3}i)^{7}$

Giải:

a) Xét số phức:

$$\frac{(1-i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{9}}=\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\text{-}\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{10}}{\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^{9}}=\frac{2^{5}\left(\cos\text{-}\dfrac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin-\dfrac{5\pi}{12}\right)}{2^{9}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2^{4}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)}=-\frac{1}{16}$$

Vậy: phần thực bằng: $-\dfrac{1}{16}$ và phần ảo bằng 0.

b) Xét số phức:

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)i^{5}(1+\sqrt{3}i)^{7}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)i\;\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{7}$$

$$=2^{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)i\;\left[\left(\cos\frac{7\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{3}\right)\right].$$

$$=2^{7}\left[\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi\right]i=2^{7}i.$$

Vậy: phần thực bằng: 0 và phần ảo bằng 128.

Bài toán 4

Tính số phức sau: $z=\dfrac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{5}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

Giải:

$$z=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{10}2^{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{5}}{2^{10}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\text{isin}\,\dfrac{4\pi}{3}\right)^{10}}$$

$$= \frac{2^{10}\left(cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right)\left(cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2^{10}\left(cos\frac{40\pi}{3}+\mathrm{isin}\frac{40\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}{cos\frac{40\pi}{3}+\mathrm{isin}\frac{40\pi}{3}} = \ cos(-15p)\ +\ isin(-15p)\ =\ -1.$$

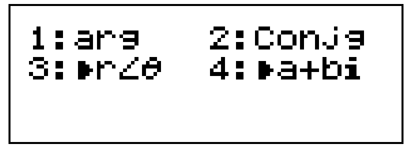
III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570VN-PLUS ĐỂ GIẢI

PP CASIO

Đưa máy tính về dạng rađian SHIFT MODE 4

Để chuyển một số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác, trong chế độ CMPLX ta bấm SHIFT 2 và chọn 3

Để chuyển một số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác, trong chế độ CMPLX ta bấm SHIFT 2 và chọn 4

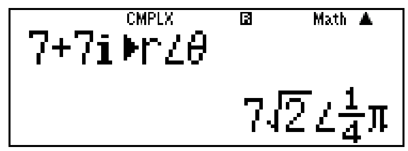


Bài toán 1

Viết số phức $z = 7 + 7i$ dưới dạng lượng giác.

Hướng dẫn:

- Đưa máy tính về dạng rađian SHIFT MODE 4
- Vào chế độ CMPLX MODE 2
- Nhập số phức z: 7 + 7 ENG.
- Nhấn SHIFT 2 3 để chuyển sang dạng lượng giác.
- Kết quả thu được là:



Số phức z đã được chuyển sang dạng lượng giác với $r = 7\sqrt{2}$ và acgument là $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

$$\left(z = 7\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right).$$

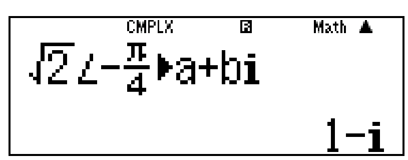
Bài toán 2

Viết số phức z=$\sqrt{2}$ (cos$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ + isin$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$) dưới dạng đại số.

Hướng dẫn:

- Đưa máy tính về dạng rađian SHIFT MODE 4
- Vào chế độ CMPLX MODE 2
- Nhập số phức z ở dạng lượng giác và chuyển số phức qua dạng đại số như sau:

  √■ 2 ▶ SHIFT (−) − ▭/▭ SHIFT x10^x ▼ 4 ▶ SHIFT 2 4 =
- Màn hình cho kết quả là:



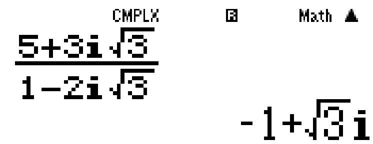
Bài toán 3

Số phức $z=\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$ có một Acgument là :

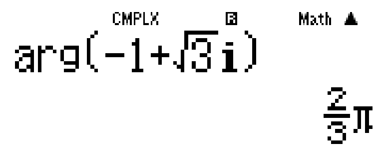
A. $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$

<u>Hướng dẫn:</u>

- Thu gọn z về dạng tối giản $\Rightarrow z=-1+\sqrt{3}i$



- Tìm Acgument của z với lệnh SHIFT 2 1



Vậy z có 1 Acgument là $\dfrac{2\pi}{3}$. Tuy nhiên khi so sánh kết quả ta lại không thấy có giá trị nào là $\dfrac{2\pi}{3}$. Khi đó ta nhớ đến tính chất "Nếu góc α là một Acgument thì góc $\alpha+2\pi$ cũng là một Acgument"

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D** vì $\dfrac{2\pi}{2}+2\pi=\dfrac{8\pi}{3}$

IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ỨNG DỤNG CỦA DẠNG LƯỢNG GIÁC

Bài toán 1

Giải phương trình: $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\left(1\right)$

Giải:

Ta có: (1) $\Leftrightarrow z^4\left(z+1\right) + z^2\left(z+1\right) + \left(z+1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(z+1\right)\left(z^4 + z^2 + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^4 + z^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

Từ $z^2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3} \\ z = -\cos\dfrac{\pi}{3} - \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Từ $z^2 = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \\ z = -\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

Tóm lại phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm:

$z = -1$; $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Bài toán 2

Cho z_1 và z_2 là hai số phứ xác định bởi $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Xác định dạng đại số và dạng lượng giác của $\dfrac{z_1}{z_2}$. Từ đó suy ra giá trị chính xác của: $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ và $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Giải:

Ta có: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có: $z_1 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)) \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}) \Rightarrow$

$\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ và $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét: Qua bài tập này ta thấy được một ứng dụng quan trọng của số phức, ta có thể tính sin, cos của một góc bằng công cụ số phức thông qua sự liên hệ giữa dạng đại số và dạng lượng giác của số phức.

Bài toán 3

Giải phương trình: $z^6 + 64 = 0$.

Giải:

Ta có: : $z^6 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -64.$

Giả sử $z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Ta có: $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

Và $\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow 6\varphi = \pi + 2k\pi$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6} + 2k\dfrac{\pi}{6}$

Với $k = 0 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

Với $k = -1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$

Với $k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$

Với $k = -2 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -2i$

Với $k = -3 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i.$

Bài toán 4

Tìm n là số nguyên dương và $n \in [1,10]$ sao cho số phức $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ là số thực.

Giải:

Ta có: $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

Để $z \in R \Rightarrow 2^n.\sin\dfrac{n\pi}{3} = 0 \Rightarrow \sin\dfrac{n\pi}{3} = 0$

$\Rightarrow$ n chia hết cho 3, mà n nguyên dương $\in [1;10] \Rightarrow n \in [3;6;9]$.

V. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Số phức z = -1 + i viết dưới dạng lượng giác là:

A. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

B. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

D. $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Câu 2: Số phức z = 8i viết dưới dạng lượng giác là:

A. $z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

B. $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

C. $z = 8\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

D. $z = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

Câu 3: Dạng lượng giác của số phức $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

B. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

C. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

D. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$

Câu 4: : Số phức z = 8i viết dưới dạng lượng giác là:

A. $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

B. $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$

D. $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

Câu 6: Cho số phức z = - 1 - i. Argumen của z (sai khác k2π) bằng:

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

Câu 7: Điểm biểu diễn của số phức $z = \sqrt{2}\left(\cos 315^0 + i\sin 315^0\right)$ có toạ độ là:

A. (1; -1) B. (-1; 1) C. (2; 2) D. (-2; 2)

Câu 8: Cho $z_1 = 3\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)$, $z_2 = 4\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)$. Tích $z_1.z_2$ bằng:

A. 12(1 - i) B. $6\sqrt{2}\left(1+i\right)$ C. $3\sqrt{2}\left(1-2i\right)$ D. $\sqrt{2}\left(2+i\right)$

Câu 9: Cho $z_1 = 3\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)$, $z_2 = 2\left(-\cos 110^0 + i\sin 110^0\right)$. Tích $z_1.z_2$ bằng:

A. 6(1 - 2i) B. 4i C. 6i D. 6(1 - i)

Câu 10: Cho $z_1 = 8\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)$, $z_2 = 4\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)$.Thương $\frac{z_1}{z_2}$ bằng:

A. $1 + i\sqrt{3}$ B. $2\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ C. $1 - i\sqrt{3}$ D. 2(1 + i)

Câu 11: Cho $z_1 = 4\left(\cos 10^0 + i\sin 10^0\right)$, $z_2 = -2\left(\cos 280^0 + i\sin 280^0\right)$. Thương $\frac{z_1}{z_2}$ bằng:

A. 2i B. -2i C. 2(1 + i) D. 2(1 - i)

Câu 12: Tính $(1 - i)^{20}$, ta được:

A. -1024 B. 1024i C. 512(1 + i) D. 512(1 - i)

Câu 13: Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau đây là đúng?

A. $(1+ i)^8 = -16$ B. $(1 + i)^8 = 16i$

C. $(1 + i)^8 = 16$ D. $(1 + i)^8 = -16i$

Câu 14: Cho số phức $z \neq 0$. Biết rằng số phức nghịch đảo của z bằng số phức liên hợp của nó. Trong các kết luận nào đúng:

A. $z \in R$ B. z là một số thuần ảo

C. $|z| = 1$ D. $|z| = 2$

Câu 15: Cho số phức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. kết luận nào sau đây là đúng:

A. $z^n + \overline{(z^n)} = n\cos\varphi$ B. $z^n + \overline{(z^n)} = 2\cos n\varphi$

C. $z^n + \overline{(z^n)} = 2n\cos\varphi$ D. $z^n + \overline{(z^n)} = 2\cos\varphi$.

Đáp án:

1. C	**2. B**	**3. D**	**4. B**	**5.**
6. C	**7. A**	**8. B**	**9. C**	**10. A**
11. B	**12. A**	**13. C**	**14. C**	**15. B**

F. TUYỂN TẬP CÁC CÂU SỐ PHỨC VẬN DỤNG CAO

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$ **B.** $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số phức với phần thực và ảo đều khác 0

C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực **D.** $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 12\pi$. **C.** $S = 16\pi$. **D.** $S = 25\pi$.

Câu 3. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z = 1 - 2i$. **B.** $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. **C.** $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **D.** $z = -1 + 2i$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13} + 1$.

Câu 5. Cho $z_1,\ z_2,\ z_3$ là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$. **B.** $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \le |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ge |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$. **D.** $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \ne |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

Câu 6. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **B.** $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **D.** $|z_1 + z_2 + z_3| \ne |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Câu 7. Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực.Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì

A. $P(|z|) = 0.$ **B.** $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$ **C.** $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0.$ **D.** $P(\bar{z}) = 0.$

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \le 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A| \le 1$. **B.** $|A| \ge 1$. **C.** $|A| < 1$. **D.** $|A| > 1$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left|1 + \frac{5i}{z}\right|$.

A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 10. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \dfrac{z+2\overline{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i) = 3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}\right) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I). B. Góc phần tư thứ (II).

C. Góc phần tư thứ (III). D. Góc phần tư thứ (IV).

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2+z+1| + |z^3+1|$.

A. $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 1$. B. $M_{\max} = 5;\ M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 1$. D. $M_{\max} = 4;\ M_{\min} = 2$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

A. $\dfrac{3}{4}$. B. 1. C. 2. D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 13. Gọi $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ là các nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = (z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$.

A. $P = 2$. B. $P = \dfrac{17}{9}$. C. $P = \dfrac{16}{9}$. D. $P = \dfrac{15}{9}$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i| = 3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$. C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{5}$ C. $\sqrt{20}$ D. $2\sqrt{20}$.

Câu 16. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\dfrac{13}{4}$.

Câu 17. Gọi điểm $A,\ B$ lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \dfrac{1+i}{2}z;\ (z \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ ($A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.
B. Tam giác OAB vuông cân tại O.
C. Tam giác OAB vuông cân tại B.
D. Tam giác OAB vuông cân tại A.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z^2+4\right|=2\left|z\right|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}\le\left|z\right|\le\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$.
B. $\sqrt{5}-1\le\left|z\right|\le\sqrt{5}+1$.
C. $\sqrt{6}-1\le\left|z\right|\le\sqrt{6}+1$.
D. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\le\left|z\right|\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1+2i\right|=2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.
B. $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$
C. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$
D. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$

Câu 20. Cho $A,\ B,\ C,\ D$ là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i;\ 1+\sqrt{3}+i;\ 1+\sqrt{3}-i;\ 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I. Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z=\sqrt{3}$.
B. $z=1-\sqrt{3}i$.
C. $z=1$.
D. $z=-1$.

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy điểm M là điểm biểu diễn số phức $z=\left(2+i\right)^2\left(4-i\right)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

A. $-\dfrac{425}{87}$.
B. $\dfrac{475}{87}$.
C. $-\dfrac{475}{87}$.
D. $\dfrac{425}{87}$.

Câu 22. Cho $z_1,\ z_2$ là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\dfrac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $\left|z_1-z_2\right|=2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1.

A. $\left|z_1\right|=\sqrt{5}$.
B. $\left|z_1\right|=3$.
C. $\left|z_1\right|=2$.
D. $\left|z_1\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 23. Cho số phức $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m\in\left[1;50\right]$ để z là số thuần ảo?

A. 24.
B. 26.
C. 25.
D. 50.

Câu 24. Nếu $\left|z\right|=1$ thì $\dfrac{z^2-1}{z}$

A. lấy mọi giá trị phức.
B. là số thuần ảo.
C. bằng 0.
D. lấy mọi giá trị thực.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\left(1-i\right)z-6-2i\right|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $4\sqrt{5}$
B. $3\sqrt{5}$.
C. 3.
D. $3+\sqrt{5}$

Câu 26. Gọi $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $\left|z-2\right|^2 + \left|z+2\right|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy.

A. $xy = \frac{9}{4}$.
B. $xy = \frac{13}{2}$.
C. $xy = \frac{16}{9}$.
D. $xy = \frac{9}{2}$.

Câu 27. Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left|\frac{z+1}{i-z}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-i}{2+z}\right| = 1$?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 28. Gọi điểm $A,\ B$ lần lượt biểu diễn các số phức $z_1;\ z_2;\ \left(z_1.z_2 \neq 0\right)$ trên mặt phẳng tọa độ ($A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.
B. Tam giác OAB vuông cân tại O.
C. Tam giác OAB vuông cân tại B.
D. Diện tích tam giác OAB không đổi.

Câu 29. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-4i\right| = \left|z-2i\right|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

A. $\sqrt{5}$
B. $3\sqrt{5}$.
C. $3\sqrt{2}$
D. $3+\sqrt{2}$

Câu 30. Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực $m,\ n$ để phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ **không** có nghiệm thực.

A. $m^2 - 4n > 0$.

B. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n > 0 \\ m < 0 \\ n > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

D. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$

Câu 31. Nếu $\left|z\right| = a;\ \left(a > 0\right)$ thì $\frac{\overline{z}^2 - a}{\overline{z}}$

A. lấy mọi giá trị phức.
B. là số thuần ảo.
C. bằng 0.
D. lấy mọi giá trị thực.

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1+2i\right| = 3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z-1+i$.

A. 4.
B. $2\sqrt{2}$.
C. 2.
D. $\sqrt{2}$.

Câu 33. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{2z + \overline{z} + 1 - i}{z^2 + i}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $\left(1-i\right)\left(z-i\right) = 2 - i + z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}\right) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I). B. Góc phần tư thứ (II).
C. Góc phần tư thứ (III). D. Góc phần tư thứ (IV).

Câu 34. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left|z - 3 - 4i\right| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = \left|z + 2\right|^2 - \left|z - i\right|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z + i$.

A. $\left|z + i\right| = 2\sqrt{41}$ B. $\left|z + i\right| = 3\sqrt{5}$.
C. $\left|z + i\right| = 5\sqrt{2}$ D. $\left|z + i\right| = \sqrt{41}$.

Câu 35. Các điểm $A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ lần lượt biểu diễn các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ và $z_1',\ z_2',\ z_3'$ trên mặt phẳng tọa độ ($A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ đều không thẳng hàng). Biết $z_1 + z_2 + z_3 = z_1' + z_2' + z_3'$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.
B. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trực tâm.
C. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.
D. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.

Câu 36. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = \left(2 - 3i\right)\left(1 + i\right)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $-\frac{5}{12}$. B. $\frac{5}{12}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $-\frac{12}{5}$.

Câu 37. Cho số phức $z = \dfrac{-m + i}{1 - m\left(m - 2i\right)}$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z.

A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 38. Cho số phức z có $\left|z\right| = m;\ \left(m > 0\right)$. Với $z \neq m;$ tìm phần thực của số phức $\dfrac{1}{m - z}$.

A. m. B. $\frac{1}{m}$. C. $\frac{1}{4m}$. D. $\frac{1}{2m}$.

Câu 39. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right| = \sqrt{3}$, $\left|z_2\right| = 2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết $\angle\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right|$.

A. $\sqrt{13}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Câu 40. Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I(-1;-2), R = \sqrt{5}$.
B. $I(1;2), R = \sqrt{5}$.
C. $I(-1;2), R = 5$.
D. $I(1;-2), R = 5$.

Câu 41. Trong các số phức z thỏa $|z+3+4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0.
B. $|z_0| = 2$.
C. $|z_0| = 7$.
D. $|z_0| = 3$.

Câu 42. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4| + |z-4| = 10$.

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R = 4$..

B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 43. Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z+2i-1| = |z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

A. $3+i$.
B. $1+3i$.
C. $2-3i$.
D. $-2+3i$.

Câu 44. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \le |z+1-i| \le 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu ?

A. $P = 4\pi$.
B. $P = \pi$.
C. $P = 2\pi$.
D. $P = 3\pi$.

Câu 45. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2 + (\overline{z})^2 + 2|z|^2\right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu ?

A. $d(d_1, d_2) = 2$.
B. $d(d_1, d_2) = 4$.
C. $d(d_1, d_2) = 1$.
D. $d(d_1, d_2) = 6$.

Câu 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$.Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$.
B. $\min|w| = 2$.
C. $\min|w| = 1$.
D. $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Câu 47. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $|z_2 + z_1|$. **B.** $|z_2 - z_1|$. **C.** $|z_1| + |z_2|$. **D.** $|z_1| - |z_2|$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$. **C.** $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Câu 49. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2| + |z+2| = 10$.

A. Đường tròn $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 100$. **B.** Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. Đường tròn $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$. **D.** Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.

Câu 50. Tìm nghiệm phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \end{cases}$

A. $z = 2+i$. **B.** $z = 1-i$. **C.** $z = 2-i$. **D.** $z = 1+i$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1D	2C	3C	4D	5D	6A	7D	8A	9C	10A	11A	12A	13B	14A	15D
16A	17C	18B	19A	20C	21D	22C	23C	24B	25B	26D	27A	28A	29C	30D
31B	32C	33B	34D	35C	36A	37A	38D	39B	40C	41D	42D	43A	44C	45B
46C	47B	48B	49D	50D										

Câu 1.

Phương pháp tự luận:

Vì $|z_1| = |z_2|$ và $z_1 \neq z_2$ nên cả hai số phức đều khác 0.

Đặt $w = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ và $|z_1| = |z_2| = a$, ta có

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{\dfrac{a^2}{z_1} + \dfrac{a^2}{z_2}}{\dfrac{a^2}{z_1} - \dfrac{a^2}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} = -w$$

Từ đó suy ra w là số thuần ảo

Phương pháp trắc nghiệm:

Số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ nên chọn $z_1 = 1; z_2 = i$, suy ra $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

là số thuần ảo $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 2. $w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \dfrac{w - 1 + i}{2}$

$$|z - 3 + 4i| \le 2 \Leftrightarrow \left|\frac{w-1+i}{2} - 3 + 4i\right| \le 2 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 6 + 8i| \le 4 \Leftrightarrow |w - 7 + 9i| \le 4 \ (1)$$

Giả sử $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó $(1) \Leftrightarrow (x-7)^2 + (y+9)^2 \le 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính $r = 4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S = \pi.4^2 = 16\pi$ $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 3.

Phương pháp tự luận

Giả sử $z = x + yi \, (x, y \in \mathbb{R})$

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y+3)i| = |(x+2) + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y+1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \ge \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra $\left|z\right|_{\min} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{5}$.Vậy $z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i. \Rightarrow$ **Chọn C.**

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z = x + yi \quad \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

$\left|z + 3i\right| = \left|z + 2 - i\right| \Leftrightarrow \left|x + \left(y + 3\right)i\right| = \left|\left(x + 2\right) + \left(y - 1\right)i\right| \Leftrightarrow x^2 + \left(y + 3\right)^2 = \left(x + 2\right)^2 + \left(y - 1\right)^2$

$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $\left|z + 3i\right| = \left|z + 2 - i\right|$ là đường thẳng $d : x - 2y - 1 = 0$.

Phương án A: $z = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn $\left(1; -2\right) \notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{2}{5}\right) \notin d$ nên loại B.

Phương án D: $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $\left(-1; 2\right) \notin d$ nên loại B.

Phương án C: $z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{2}{5}\right) \in d$

Câu 4. Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + \left(y - 3\right)i$.

Theo giả thiết $\left(x - 2\right)^2 + \left(y - 3\right)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I\left(2; 3\right)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $\left|\bar{z} + 1 + i\right| = \left|x - yi + 1 + i\right| = \left|x + 1 + \left(1 - y\right)i\right| = \sqrt{\left(x + 1\right)^2 + \left(y - 1\right)^2}$.

Gọi $M\left(x; y\right)$ và $H\left(-1; 1\right)$ thì $HM = \sqrt{\left(x + 1\right)^2 + \left(y - 1\right)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$9t^2 + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2 + \dfrac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \dfrac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = \sqrt{13} + 1 \Rightarrow$ **Chọn D**

Câu 5.

Cách 1: Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 + z_3 = -z_1$

$\left(z_1 + z_2 + z_3\right)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3\left(z_1z_2 + z_1z_3\right)\left(z_1 + z_2 + z_3\right) + 3z_2z_3\left(z_2 + z_3\right)$

$= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3$.

$\Rightarrow \left|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3\right| = \left|3z_1z_2z_3\right| = 3\left|z_1\right|\left|z_2\right|\left|z_3\right| = 3$

Mặt khác $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 1$ nên $\left|z_1\right|^3 + \left|z_2\right|^3 + \left|z_3\right|^3 = 3 \Rightarrow$ **Chọn D.**

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 6.

Cách 1: Kí hiệu Re: là phần thực của số phức.

Ta có $\left|z_1+z_2+z_3\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_3+\overline{z}_3z_1\right)=3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_3+\overline{z}_3z_1\right)(1).$

$\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|^2=\left|z_1z_2\right|^2+\left|z_2z_3\right|^2+\left|z_3z_1\right|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1\overline{z}_2z_2z_3+\overline{z}_2\overline{z}_3z_3z_1+\overline{z}_3\overline{z}_1z_1z_2\right)$

$=\left|z_1\right|^2.\left|z_2\right|^2+\left|z_2\right|^2.\left|z_3\right|^2+\left|z_3\right|^2.\left|z_1\right|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1\left|z_2\right|^2z_3+\overline{z}_2\left|z_3\right|^2z_1+\overline{z}_3\left|z_1\right|^2z_2\right)$

$=3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_3+\overline{z}_2z_1+\overline{z}_3z_2\right)==3+2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1z_2+\overline{z}_3z_3+\overline{z}_3z_1\right)(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\left|z_1+z_2+z_3\right|=\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|$.

Các h khác: B hoặc C đúng suy ra D đúngLoại B, C.

Chọn $z_1=z_2=z_3\Rightarrow$ A đúng và D sai $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Cách 2: thay thử $z_1=z_2=z_3=1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 7. Giả sử $A(-3;-3;0)$ có dạng $P\left(z\right)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n\ \left(a_0;\ a_1;\ a_2;...;a_n\in\mathbb{R};\ a_n\neq 0\right)$

$P\left(z\right)=0\Leftrightarrow a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n=0\Rightarrow\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n}=0$

$\Rightarrow a_0+a_1\overline{z}+a_2\overline{z}^2+...+a_n\overline{z}^n=0\Rightarrow P\left(\overline{z}\right)=0$. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 8. Đặt Có $a=a+bi,\ \left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow a^2+b^2\le 1$ (do $\left|z\right|\le 1$)

$$\left|A\right|=\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right|=\left|\frac{2a+\left(2b-1\right)i}{2-b+ai}\right|=\sqrt{\frac{4a^2+\left(2b+1\right)^2}{\left(2-b\right)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\dfrac{4a^2+\left(2b+1\right)^2}{\left(2-b\right)^2+a^2}\le 1$.

Thật vậy ta có $\dfrac{4a^2+\left(2b+1\right)^2}{\left(2-b\right)^2+a^2}\le 1\Leftrightarrow 4a^2+\left(2b+1\right)^2\le\left(2-b\right)^2+a^2\Leftrightarrow a^2+b^2\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2+b^2=1$.Vậy $\left|A\right|\le 1\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 9. Ta có: $A=\left|1+\dfrac{5i}{z}\right|\le\left|1\right|+\left|\dfrac{5i}{z}\right|=1+\dfrac{5}{\left|z\right|}=6.$ Khi $z=i\Rightarrow A=6.\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 10. Ta có: $\left(2+i\right)\left(z+i\right)=3-i+z\Rightarrow z=1-i\Rightarrow w=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}i\Rightarrow M\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{1}{5}.$

Lúc đó: $\sin 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{5}{13}>0;\ \ \cos 2\varphi=\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{12}{13}>0$. $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 11. Ta có: $M\le\left|z\right|^2+\left|z\right|+1+\left|z\right|^3+1=5$, khi $z=1\Rightarrow M=5\Rightarrow M_{\max}=5.$

Mặt khác: $M=\dfrac{\left|1-z^3\right|}{\left|1-z\right|}+\left|1+z^3\right|\ge\dfrac{\left|1-z^3\right|}{2}+\dfrac{\left|1+z^3\right|}{2}\ge\dfrac{\left|1-z^3+1+z^3\right|}{2}=1,$ khi

$z=-1\Rightarrow M=1\Rightarrow M_{\min}=1.\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 12. Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i$. $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 13. Ta có phương trình $\Leftrightarrow f(z)=(2z-i)^4-(z-1)^4=0$.

Suy ra: $f(z)=15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Vì

$z_1^2+1=(z_1-i)(z_1+i)\Rightarrow P=\frac{f(i).f(-i)}{225}$ (1).

Mà $f(i)=i^4-(i-1)^4=5$; $f(-i)=(-3i)^4-(i+1)^4=85$. Vậy từ $(1)\Rightarrow P=\frac{17}{9}$. $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 14. Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow z-2i=x+(y-2)i$. Ta có:

$|z-1+2i|=9\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Đặt $x=1+3\sin t$; $y=-2+3\cos t$; $t\in[0;2\pi]$.

$\Rightarrow|z-2i|^2=(1+3\sin t)^2+(-4+3\cos t)^2=26+6(\sin t-4\cos t)=26+6\sqrt{17}\sin(t+\alpha)$; $(\alpha\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow\sqrt{26-6\sqrt{17}}\le|z-2i|\le\sqrt{26+6\sqrt{17}}\Rightarrow|z-2i|_{\max}=\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 15. Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có:

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$; $x\in[-1;1]$. Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với

$x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\frac{3}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}\in(-1;1)$.

Ta có: $f(1)=2$; $f(-1)=6$; $f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{20}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{20}$. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 16. Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1$

Đặt $t=|z+1|$, ta có $0=|z|-1\le|z+1|\le|z|+1=2\Rightarrow t\in[0;2]$.

Ta có $t^2=(1+z)(1+\overline{z})=1+z.\overline{z}+z+\overline{z}=2+2x\Rightarrow x=\frac{t^2-2}{2}$.

Suy ra $|z^2-z+1|=|z^2-z+z.\overline{z}|=|z||z-1+\overline{z}|=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=|t^2-3|$.

Xét hàm số $f(t)=t+|t^2-3|, t\in[0;2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$\max f(t)=\frac{13}{4}$; $\min f(t)=\sqrt{3}\Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$. $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 17. Ta có: $OA = |z|; |OB| = |z'| = \left|\frac{1+i}{2}.z\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right|.|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \Rightarrow BA = |z - z'| = \left|z - \frac{1+i}{2}z\right| = \left|\frac{1-i}{2}\right|.|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$

Suy ra: $OA^2 = OB^2 + AB^2$ và $AB = OB \Rightarrow OAB$ là tam giác vuông cân tại B. $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 18. Áp dụng bất đẳng thức $|u| + |v| \ge |u+v|$, ta được

$2|z| + |-4| = |z^2 + 4| + |-4| \ge |z|^2 \Rightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \le 0 \Rightarrow |z| \le \sqrt{5} + 1.$

$2|z| + |z|^2 = |z^2 + 4| + |-z^2| \ge 4 \Rightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \ge 0 \Rightarrow |z| \ge \sqrt{5} - 1.$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5} - 1$, khi $z = -i + i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5} + 1$, khi $z = i + i\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 19. Gọi $z = x + yi;\ (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$

Đặt $x = 1 + 2\sin t; y = -2 + 2\cos t;\ t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó:

$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2}\sin(t + \alpha);\ (\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5}\sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}\right]$

$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ đạt được khi $z = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i$. $\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 20. Ta có $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} - i$; $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} + 3i$. Mặt khác $\frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D.

Vậy $I(1;0) \Rightarrow z = 1$. $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 21. Ta có: $z = (2+i)^2(4-i) = 16 + 13i \Rightarrow M(16;13) \Rightarrow \tan\varphi = \frac{13}{16}.$

Ta có: $\cos 2\varphi = \frac{1 + \tan^2\varphi}{1 - \tan^2\varphi} = \frac{425}{87}$. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 22. Gọi $z_1 = a + bi \Rightarrow z_2 = a - bi;\ (a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R})$. Không mất tính tổng quát ta gọi $b \ge 0$.

Do $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |2bi| = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}.$

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_1.z_2 \in \mathbb{R}$, mà $\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{z_1^3}{(z_1 z_2)^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1^3 \in \mathbb{R}.$

Ta có: $z_1^3 = (a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3a^2b - b^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{array}\right. \Rightarrow a^2 = 1.$

Vậy $\left|z_1\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2. \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 23. Ta có: $z = \left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m = (2i)^m = 2^m.i^m$

z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ (do $z \neq 0;\ \forall m \in \mathbb{N}^*$).

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài. $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 24. Ta có: $\dfrac{z^2-1}{z} = z - \dfrac{1}{z} = z - \dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = z - \dfrac{\overline{z}}{\left|z\right|^2} = z - \overline{z}$ là số thuần ảo. $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 25. Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|\left(1-i\right)z - 6 - 2i\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\left(1-i\right)\right|.\left|z + \dfrac{-6-2i}{1-i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|z - 2 - 4i\right| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 5.$

Đặt $x = 2 + \sqrt{5}\sin t; y = 4 + \sqrt{5}\cos t;\ t \in \left[0; 2\pi\right]$.

Lúc đó:

$$\left|z\right|^2 = \left(2 + \sqrt{5}\sin t\right)^2 + \left(4 + \sqrt{5}\cos t\right)^2$$

$$= 25 + \left(4\sqrt{5}\sin t + 8\sqrt{5}\cos t\right) = 25 + \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(8\sqrt{5}\right)^2}\sin\left(t+\alpha\right);\ \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \left|z\right|^2 = 25 + 20\sin\left(t+\alpha\right) \Rightarrow z \in \left[\sqrt{5}; 3\sqrt{5}\right]$$

$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5}$ đạt được khi $z = 3 + 6i. \Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 26. Đặt $z = x + iy\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 36$.

Đặt $x = 3\cos t, y = 3\sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{18 - 18\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \leq 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i. \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 27. Ta có: $\begin{cases} \left|\dfrac{z+1}{i-z}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-i}{2+z}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z+1\right| = \left|i-z\right| \\ \left|z-i\right| = \left|2+z\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i.$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 28. Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1\left(z_2 - z_1\right);\ \left|z_1\right|^2 = \left|z_1\right|.\left|z_2 - z_1\right|$. Do

$z_1 \neq 0 \Rightarrow \left|z_2 - z_1\right| = \dfrac{\left|z_2\right|^2}{\left|z_1\right|};\quad (1)$

Mặt khác: $z_1^2 = z_2\left(z_1 - z_2\right) \Rightarrow \left|z_1\right|^2 = \left|z_2\right|.\left|z_1 - z_2\right| \Leftrightarrow \left|z_1 - z_2\right| = \dfrac{\left|z_1\right|^2}{\left|z_2\right|}$ (do $z_2 \neq 0$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{\left|z_2\right|^2}{\left|z_1\right|} = \dfrac{\left|z_1\right|^2}{\left|z_2\right|} \Leftrightarrow \left|z_1\right| = \left|z_2\right|$. Vậy ta có: $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_2 - z_1\right| \Rightarrow OA = OB = AB$.

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 29. Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|z - 2 - 4i\right| = \left|z - 2i\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-2\right)^2 + \left(y-4\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y-2\right)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$

Ta có: $\left|z + 2i\right|^2 = x^2 + \left(y+2\right)^2 = x^2 + \left(6-x\right)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2\left(x-3\right)^2 + 18 \geq 18$

$\Rightarrow \left|z + 2i\right|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ khi $z = 3 + i.$ $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 30. Phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ không có nghiệm thực trong các trường hợp:

TH 1: Phương trình vô nghiệm, tức là $m^2 - 4n < 0.$

TH 2: Phương trình $t^4 + mt^2 + n = 0;\ \left(t = z^2\right)$ có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}.$

$\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 31. Ta có: $\dfrac{\overline{z}^2 - a^2}{\overline{z}} = \overline{z} - \dfrac{a}{\overline{z}} = \overline{z} - \dfrac{a^2 z}{\overline{z}.z} = \overline{z} - \dfrac{a^2 z}{\left|\overline{z}\right|^2} = \overline{z} - z$ là số thuần ảo. $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 32. Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow z - 1 + i = \left(x-1\right) + \left(y+1\right)i$. Ta có:

$\left|z - 1 + 2i\right| = 9 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 9$.

Đặt $x = 1 + 3\sin t;\ y = -2 + 3\cos t;\ t \in \left[0; 2\pi\right]$.

$\Rightarrow \left|z - 1 + i\right|^2 = \left(3\sin t\right)^2 + \left(-1 + 3\cos t\right)^2 = 10 - 6\cos t \Rightarrow 2 \leq \left|z - 2i\right| \leq 4 \Rightarrow \left|z - 1 + i\right|_{\min} = 2$, khi $z = 1 + i.$ $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 33. Ta có:

$\left(1-i\right)\left(z-i\right) = 2 - i + z \Rightarrow z = 3i \Rightarrow w = -\dfrac{7}{82} - \dfrac{19}{82}i \Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{82}; -\dfrac{19}{82}\right) \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{19}{7}.$

Lúc đó: $\sin 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \dfrac{133}{205} > 0;\ \ \cos 2\varphi = \dfrac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = -\dfrac{156}{205} < 0$. $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 34. Gọi $z = x + yi;\ \left(x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z - 3 - 4i\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(C\right): \left(x-3\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 5$: tâm $I\left(3;4\right)$ và $R = \sqrt{5}.$

Mặt khác:

$M = \left|z + 2\right|^2 - \left|z - i\right|^2 = \left(x+2\right)^2 + y^2 - \left[\left(x^2\right) + \left(y-1\right)^2\right] = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d: 4x + 2y + 3 - M = 0.$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và $\left(C\right)$ có điểm chung

$\Leftrightarrow d\left(I;d\right) \le R \Leftrightarrow \dfrac{\left|23-M\right|}{2\sqrt{5}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|23-M\right| \le 10 \Leftrightarrow 13 \le M \le 33$

$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y-30=0 \\ \left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow z+i=5-4i \Rightarrow \left|z+i\right| = \sqrt{41}. \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 35. Gọi $z_1 = x_1+y_1 i;\ z_2 = x_2+y_2 i;\ z_3 = x_3+y_3 i;\ \left(x_k';\ y_k' \in \mathbb{R};\ k=\overline{1;3}\right)$.

Khi đó: $A\left(x_1;y_1\right);\ B\left(x_2;y_2\right);\ C\left(x_3;y_3\right)$, gọi G là trọng tâm

$\Delta ABC \Rightarrow G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Tương tự, gọi $z_1' = x_1'+y_1' i;\ z_2' = x_2'+y_2' i;\ z_3' = x_3'+y_3' i;\ \left(x_k';\ y_k' \in \mathbb{R};\ k=\overline{1;3}\right)$.

Khi đó: $A'\left(x_1';y_1'\right);\ B'\left(x_2';y_2'\right);\ C'\left(x_3';y_3'\right)$,

gọi G' là trọng tâm $\Delta A'B'C' \Rightarrow G'\left(\dfrac{x_1'+x_2'+x_3'}{3};\dfrac{y_1'+y_2'+y_3'}{3}\right)$.

Do $z_1+z_2+z_3 = z_1'+z_2'+z_3' \Leftrightarrow \left(x_1+x_2+x_3\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)i = \left(x_1'+x_2'+x_3'\right)+\left(y_1'+y_2'+y_3'\right)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = x_1'+x_2'+x_3' \\ y_1+y_2+y_3 = y_1'+y_2'+y_3' \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'. \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 36. Ta có: $z = \left(2-3i\right)\left(1+i\right) = 5-i \Rightarrow M\left(5;-1\right) \Rightarrow \tan\varphi = -\dfrac{1}{5}$.

Ta có: $\sin 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = -\dfrac{5}{12}. \Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 37. Ta có:

$z = \dfrac{-m+i}{1-m\left(m-2i\right)} = \dfrac{m}{m^2+1} + \dfrac{i}{m^2+1} \Rightarrow \left|z\right| = \sqrt{\dfrac{1}{m^2+1}} \le 1 \Rightarrow \left|z\right|_{\max} = 1 \Leftrightarrow z = i;\ m = 0.$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 38. Gọi $\operatorname{Re}\left(z\right)$ là phần thực của số phức z.

Ta xét: $\dfrac{1}{m-z} + \overline{\left(\dfrac{1}{m-z}\right)} = \dfrac{1}{m-z} + \dfrac{1}{m-\overline{z}} = \dfrac{m-\overline{z}+m-z}{\left(m-z\right)\left(m-\overline{z}\right)} = \dfrac{2m-z-\overline{z}}{m^2+z.\overline{z}-mz-m\overline{z}}$

$= \dfrac{2m-z-\overline{z}}{2m^2-mz-m\overline{z}} = \dfrac{2m-z-\overline{z}}{m\left(2m-z-\overline{z}\right)} = \dfrac{1}{m} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{m-z}\right) = \dfrac{1}{2m}. \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 39. Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$\begin{cases} \left|z_1+z_2\right| = OP \\ \left|z_1-z_2\right| = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|z_1+z_2\right| = \sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\left|z_1\right|\left|z_2\right|\cos\left(150^0\right)} = 1 \\ \left|z_1-z_2\right| = \sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\right|\left|z_2\right|\cos\left(30^0\right)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1+z_2\right|}{\left|z_1-z_2\right|} = 1$

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 40. Đặt $z = a+bi$ và $\left|z\right| = c > 0$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Lại có $w=(3-4i)z-1+2i \Leftrightarrow z=\dfrac{w+1-2i}{3-4i}$.

Gọi $w=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Khi đó $|z|=c \Rightarrow \left|\dfrac{w+1-2i}{3-4i}\right|=c \Leftrightarrow \dfrac{|w+1-2i|}{|3-4i|}=c \Leftrightarrow |x+yi+1-2i|=5c$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=5c \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=25c^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1;2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R=5 \Rightarrow 5c=5 \Rightarrow c=1$.

Thử $c=1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 41.

Cách 1:

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z+3+4i|=2 \Leftrightarrow (a+3)^2+(b+4)^2=4$.

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R=5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có: $M(z)\in(C)$.

$|z|=OM\geq OI-R=3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z)=(C)\cap IM$.

Cách 2:

Đặt $\begin{cases}a+3=2\cos\varphi\\ b+4=2\sin\varphi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3+2\cos\varphi\\ b=-4+2\sin\varphi\end{cases}$.

$\Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\cos\varphi-3)^2+(2\sin\varphi-4)^2}=\sqrt{29-12\cos\varphi-16\sin\varphi}$.

$=\sqrt{29-20\left(\dfrac{3}{5}\cos\varphi+\dfrac{4}{5}\sin\varphi\right)}=\sqrt{29-20\cos(\alpha-\varphi)}\geq\sqrt{9}$.

$\Rightarrow |z_0|=3 \Rightarrow$ **Chọn D**

Câu 42. Ta có: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$.

Gọi $A(4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=4$.

Gọi $B(-4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-4$.

Khi đó: $|z+4|+|z-4|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10$. (*)

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A,B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\left(a>b>0,a^2=b^2+c^2\right)$

Từ (*) ta có: $2a=10 \Leftrightarrow a=5$.

$AB=2c \Leftrightarrow 8=2c \Leftrightarrow c=4 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=9$

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1.$ $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 43. Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x,y\in R)$

Gọi $E\left(1,-2\right)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$

Gọi $F\left(0,-1\right)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $\left|z+2i-1\right|=\left|z+i\right| \Leftrightarrow ME=MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x-y-2=0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M\left(3,1\right) \Rightarrow z=3+i$ => **Chọn A.**

Câu 44. Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

Gọi $A\left(-1,1\right)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+i$

$1\le\left|z+1-i\right|\le 2 \Leftrightarrow 1\le MA\le 2$. Tập hợp điểm biểu diễn là hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là $R_1=2, R_2=1 \Rightarrow P=P_1-P_2=2\pi\left(R_1-R_2\right)=2\pi$.

=> **Chọn C.**

Lưu ý cần nắm vững lý thuyết và hình vẽ của dạng bài này khi học trên lớp tránh nhầm lẫn sang tính diện tích hình tròn.

Câu 45. Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

Ta có: $\left|z^2+\left(\overline{z}\right)^2+2\left|z\right|^2\right|=16 \Leftrightarrow \left|x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2+2x^2+2y^2\right|=16$

$\Leftrightarrow \left|4x^2\right|=16 \Leftrightarrow x=\pm 2 \Rightarrow . d\left(d_1,d_2\right)=4$. $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 46. Ta có

$\left|z^2-2z+5\right|=\left|\left(z-1+2i\right)\left(z+3i-1\right)\right| \Leftrightarrow \left|\left(z-1+2i\right)\left(z-1-2i\right)\right|=\left|\left(z-1+2i\right)\left(z+3i-1\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-1+2i=0 \\ \left|\left(z-1-2i\right)\right|=\left|\left(z+3i-1\right)\right| \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $z-1+2i=0 \Rightarrow w=-1 \Rightarrow \left|w\right|=1 \ \left(1\right)$.

Trường hợp 2: $\left|z-1-2i\right|=\left|z+3i-1\right|$

Gọi $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) khi đó ta được

$\left|a-1+\left(b-2\right)i\right|=\left|\left(a-1\right)+\left(b+3\right)i\right| \Leftrightarrow \left(b-2\right)^2=\left(b+3\right)^2 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $w=z-2+2i=a-2+\dfrac{3}{2}i \Rightarrow \left|w\right|=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\dfrac{9}{4}}\ge\dfrac{3}{2} \ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ suy ra $\min|w|=1 \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 47. Giả sử $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$.

Theo đề bài ta có: $A\left(a;b\right)$, $B\left(c;d\right) \Rightarrow AB=\sqrt{\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2}$.

$z_2-z_1=\left(a-c\right)+\left(d-b\right)i \Rightarrow \left|z_2-z_1\right|=\sqrt{\left(c-a\right)^2+\left(d-b\right)^2} \Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 48. $T=\left|z+i\right|+\left|z-2-i\right|=\left|\left(z-1\right)+\left(1+i\right)\right|+\left|\left(z-1\right)-\left(1+i\right)\right|$.

Đặt $w = z - 1$. Ta có $\left|w\right| = 1$ và $T = \left|w + \left(1 + i\right)\right| + \left|w - \left(1 + i\right)\right|$.

Đặt $w = x + y.i$. Khi đó $\left|w\right|^2 = 2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} T &= \left|\left(x+1\right) + \left(y+1\right)i\right| + \left|\left(x-1\right) + \left(y-1\right)i\right| \\ &= 1.\sqrt{\left(x+1\right)^2 + \left(y+1\right)^2} + 1.\sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2} \\ &\le \sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\left(x+1\right)^2 + \left(y+1\right)^2 + \left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2\right)} \\ &= \sqrt{2\left(2x^2 + 2y^2 + 4\right)} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 4$ $\Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 49. Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức 2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức -2

Ta có: $\left|z+2\right| + \left|z-2\right| = 10 \Leftrightarrow MB + MA = 10$.

Ta có $AB = 4$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip với 2 tiêu điểm là $A\left(2;0\right)$, $B\left(-2;0\right)$, tiêu cự $AB = 4 = 2c$, độ dài trục lớn là $10 = 2a$, độ dài trục bé là $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{25-4} = 2\sqrt{21}$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2\right| + \left|z+2\right| = 10$ là Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 50. Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\left(x, y \in R\right)$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức 1 và i .

Gọi C, D lần lượt là điểm biểu diễn số phức $-i$ và $3i$

Ta có: $\left|z-1\right| = \left|z-i\right| \Leftrightarrow MA = MB$ với $A\left(1,0\right); B\left(0,1\right)$ $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực Δ_1 của AB

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z+i\right| = \left|z-3i\right| \Leftrightarrow MC = MD$ với $C\left(0,-1\right); D\left(0,3\right)$ $\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực Δ_2 của CD

M là giao điểm của $\Delta_1; \Delta_2$ $\Rightarrow M$ thỏa hệ: $\begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M\left(1,1\right) \Rightarrow z = 1 + i$ => **Chọn D.**